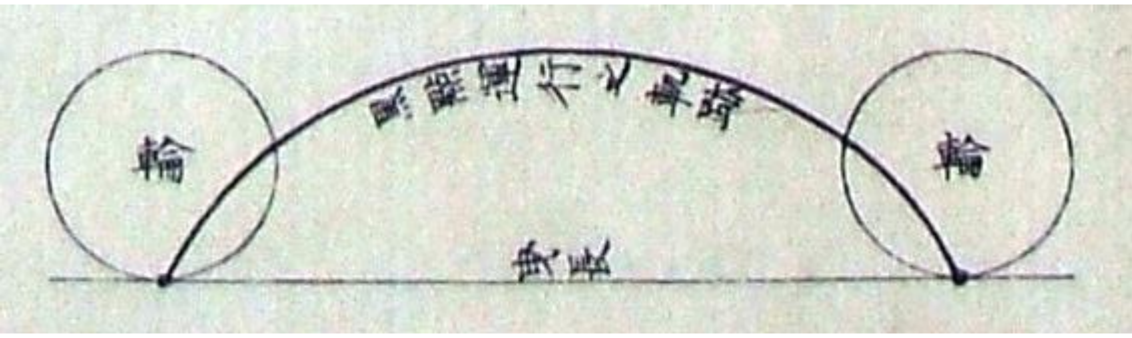


今有如図線上載一輪其輪與線相親處設黒点
而従輪曳線上黒点離線旋輪而一周再交線時
輪止其黒点運行之軌跡自有成象也其象如弧故名曰点跡弧

輪径若干曳長若干問得点跡弧背及積術如何

　　答曰　如左

点跡弧背　を求める

$\dfrac{\text{径}}{\text{截数}}$ を　子　とする。
某段数×子　を　某矢　とする。
これを括る。

$\dfrac{\text{某段数}}{\text{截数}}$ を　天　と名づける。

これを括る。とは、代入して整理すること。？　（一点鎖線の中は、私のメモ）

$$\text{某段数} \times \frac{\text{径}}{\text{截数}} = \text{某矢}$$

$$\frac{\text{某段数}}{\text{截数}} \times \text{径} = \text{某矢}$$

天×径＝某矢　なり。
立表第二乙表に依って

立表第二乙表　？

　後図を見てわかるのは、鉤股弦の術（三平方の定理、ピタゴラスの定理）から

$$\text{径}^2 - \text{某平}^2 = \text{某乙}^2$$

また、某平＝径－２×某矢

２乗して、$\text{某平}^2 = \text{径}^2 - 4 \times \text{径} \times \text{某矢} + 4 \times \text{某矢}^2$

したがって、$\text{径}^2 - \text{径}^2 + 4 \times \text{径} \times \text{某矢} - 4 \times \text{某矢}^2 = \text{某乙}^2$

$$4 \times \text{径} \times \text{某矢} - 4 \times \text{某矢}^2 = \text{某乙}^2$$

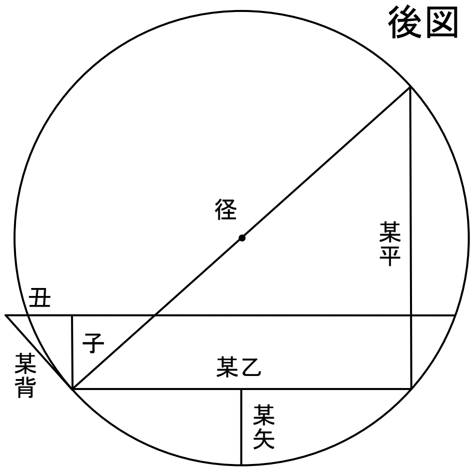
ここで、天×径＝某矢

なので、　４×径×天×径－４×天^{2}×径^{2}＝某乙^{2}

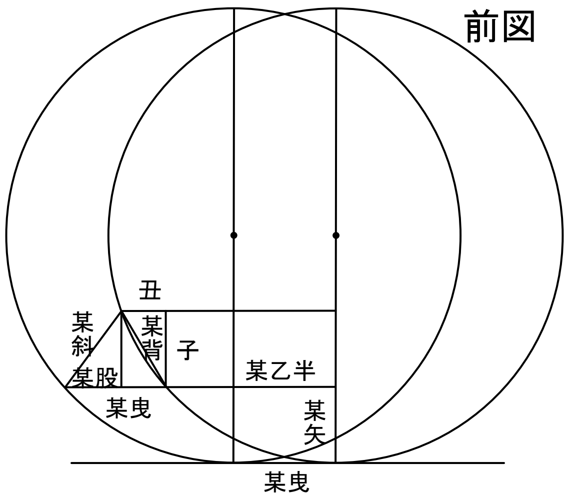
４×天×径^{2}－４×天^{2}×径^{2}＝某乙^{2}　なり。

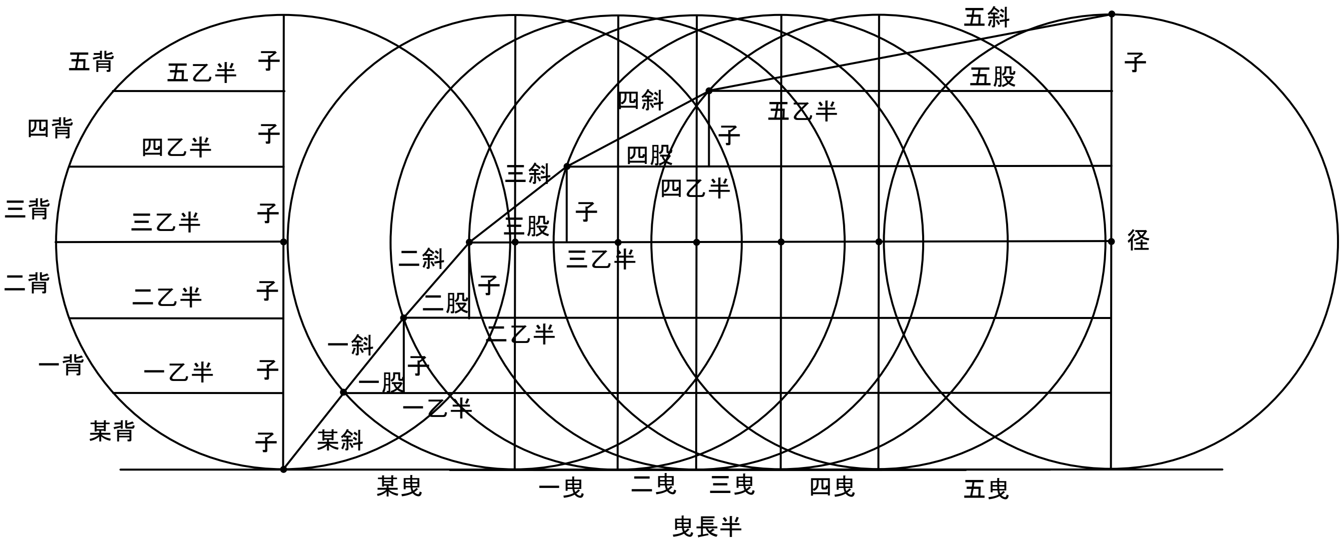
径－２×某矢＝某平　とする。
径－２×天×径＝某平　なり。　某矢　が　径　の半分以上になると、某平　は負になる。

後図



前図





それぞれが、どこからどこまでなのか書き入れなかった。繁雑になりすぎるので。
細かくは、元の資料を見て下さい。
また、元は半円だが、うまく書けないので、円で書いた。
某背、某斜、某曳　と　一背～五背、一斜～五斜、一曳～五曳が同じ図に示される
のは、少しおかしいと思うが、そのままにした。

後図によって求める　丑　および　某背　は、前図の　丑　および　某背　については、
極数においては同じものになるので、後図で求める。

> 図を描いていて、少しちがうと思ったが、極限では同じものとしたのか。納得。
> 相似な三角形の辺は、それぞれ比例する。

下の比例式で、丑　および　某背　を求める。

比例式	某平	某乙	径
	丑	子	某背

$$\frac{子 \times 某平}{某乙} = 丑$$　とする。

某平　を解く。

$$\frac{子 \times 径}{某乙} - \frac{2 \times 子 \times 天 \times 径}{某乙} = 丑$$

$$\frac{子 \times 径}{某乙} = 某背$$　なり。

比例式	径×円周率	某背
	曳長	某曳

比例より

$$\frac{某背 \times 曳長}{径 \times 円周率} = 某曳$$　とする。

某背　を解く。

$$\frac{子 \times 曳長}{円周率 \times 某乙} = 某曳$$　なり。

（前図より）　某曳ー丑＝某股　とする。

某曳　および　丑　を解く。

$$\frac{子 \times 曳長}{円周率 \times 某乙} - 丑 = 某股$$

$$\frac{子 \times 曳長}{円周率 \times 某乙} - \frac{子 \times 径}{某乙} + \frac{2 \times 子 \times 天 \times 径}{某乙} = 某股$$

> $$\frac{曳長}{円周率} + 径$$　を　多　と名づける
>
> $$\frac{曳長}{円周率} - 径$$　を　少　と名づける

$$\frac{子 \times 少}{某乙} + \frac{2 \times 子 \times 天 \times 径}{某乙} = 某股$$

もしも、某矢が径の半分よりも大きくなる場合は、下にしめすようにする。

$$\frac{子\times少}{某乙}-\frac{2\times子\times天\times径}{某乙}=某股$$

某矢が径の半分よりも大きくなる場合には、これを用いて背其象を求める。
少し異なるが、真数を得るのは、まったく同じ。

（前図より）

$子^2+某股^2=某斜^2$　とする。

$某股^2$を解く。

$$子^2+\left(\frac{子\times少}{某乙}+\frac{2\times子\times天\times径}{某乙}\right)^2=某斜^2$$

$$子^2+\frac{子^2\times少^2}{某乙^2}+\frac{4\times少\times子^2\times天\times径}{某乙^2}+\frac{4\times子^2\times天^2\times径^2}{某乙^2}=某斜^2$$

両辺に、$某乙^2$　を掛け、$子^2$　で割る。

$$某乙^2+少^2+4\times少\times天\times径+4\times天^2\times径^2=\frac{某乙^2\times某斜^2}{子^2}$$

$$少^2+4\times少\times天\times径+4\times天^2\times径^2+某乙^2=\frac{某乙^2\times某斜^2}{子^2}$$

$某乙^2$　および　少　を解く。

$$少^2+4\times\left(\frac{曳長}{円周率}-径\right)\times天\times径+4\times天^2\times径^2+某乙^2=\frac{某乙^2\times某斜^2}{子^2}$$

$$少^2+\frac{4\times曳長\times天\times径}{円周率}-4\times天\times径^2+4\times天^2\times径^2+某乙^2=\frac{某乙^2\times某斜^2}{子^2}$$

ここで、$4\times天\times径^2-4\times天^2\times径^2=某乙^2$

$$少^2+\frac{4\times曳長\times天\times径}{円周率}=\frac{某乙^2\times某斜^2}{子^2}$$

$少^2+\dfrac{4\times 曳長\times 天\times 径}{円周率}$　算を変えて　$少^2+天\times 多^2-天\times 少^2$　これを括る。

$$天\times 多^2-天\times 少^2=天\times\left(\frac{曳長}{円周率}+径\right)^2-天\times\left(\frac{曳長}{円周率}-径\right)^2$$

$$=天\times\frac{曳長^2}{円周率^2}+2\times 天\times\frac{曳長}{円周率}\times 径+径^2$$

$$-\left(天\times\frac{曳長^2}{円周率^2}-2\times 天\times\frac{曳長}{円周率}\times 径+径^2\right)$$

$$=4\times 天\times\frac{曳長}{円周率}\times 径$$

これを、反対に使うことが、算を変える　ということ？

$$少^2+天\times 多^2-天\times 少^2=\frac{某乙^2\times 某斜^2}{子^2}$$

両辺を　$少^2$　で割る。

$$1+天\times\frac{多^2}{少^2}-天\times 1=\frac{某乙^2\times 某斜^2}{子^2\times 少^2}$$

$$1+天\times\left(\frac{多^2}{少^2}-1\right)=\frac{某乙^2\times 某斜^2}{子^2\times 少^2}$$

$\dfrac{多^2}{少^2}-1$　を　乾　と名づける。

$$1+天\times 乾=\frac{某乙^2\times 某斜^2}{子^2\times 少^2}$$

平方綴術にこれを開き、某斜　とする。

「平方綴術（へいほうてつじゅつ）に開く」とは、$\sqrt{1-h}$ を級数展開すること。

$$\sqrt{1-(-天\times乾)}$$

$$=1-\frac{(-天\times乾)}{2}-\frac{(-天\times乾)^2}{8}-\frac{(-天\times乾)^3}{16}-\frac{5\times(-天\times乾)^4}{128}\cdots$$

$$=1+\frac{天\times乾}{2}-\frac{天^2\times乾^2}{8}+\frac{天^3\times乾^3}{16}-\frac{5\times天^4\times乾^4}{128}\cdots$$

$$1+\frac{天\times乾}{2}-\frac{天^2\times乾^2}{8}+\frac{天^3\times乾^3}{16}-\frac{5\times天^4\times乾^4}{128}\cdots=\frac{某乙\times某斜}{子\times少}$$

両辺を　某乙　で割る。

$$\frac{1}{某乙}+\frac{天\times乾}{2\times某乙}-\frac{天^2\times乾^2}{8\times某乙}+\frac{天^3\times乾^3}{16\times某乙}-\frac{5\times天^4\times乾^4}{128\times某乙}\cdots=\frac{某斜}{子\times少}$$

$$\frac{1}{某乙}+\frac{天\times乾}{2\times某乙}-\frac{天^2\times乾^2}{8\times某乙}+\frac{3\times天^3\times乾^3}{48\times某乙}-\frac{15\times天^4\times乾^4}{384\times某乙}=\frac{某斜}{子\times少}$$

子を解き　乙除隅乗表　に依ってこれを畳（たた）み、半背を得る。

乙除偶乗表　に　依ると、

乙除偶乗表	
$\frac{2\times截数\times円積率}{径}$	$\frac{1}{某乙}$
$\frac{2\times截数\times円積率}{2\times径}$	$\frac{天}{某乙}$
$\frac{2\times截数\times円積率\times3}{8\times径}$	$\frac{天^2}{某乙}$
$\frac{2\times截数\times円積率\times15}{48\times径}$	$\frac{天^3}{某乙}$
$\frac{2\times截数\times円積率\times105}{384\times径}$	$\frac{天^4}{某乙}$

乙除偶乗表　つづき

乙除偶乗表　つづき	
$\dfrac{2\times截数\times円積率\times945}{3840\times径}$	$\dfrac{天^5}{某乙}$
$\dfrac{2\times截数\times円積率\times10395}{46080\times径}$	$\dfrac{天^6}{某乙}$
$\dfrac{2\times截数\times円積率\times135135}{645120\times径}$	$\dfrac{天^7}{某乙}$

$$\frac{1}{某乙}+\frac{乾}{2}\times\frac{天}{某乙}-\frac{乾^2}{8}\times\frac{天^2}{某乙}+\frac{3\times乾^3}{48}\times\frac{天^3}{某乙}-\frac{15\times乾^4}{384}\times\frac{天^4}{某乙}=\frac{某斜}{子\times少}$$

として、乙除偶乗表　を適用する。また、図より某斜の和の極値は、半背なので、

$$\frac{2\times截数\times円積率}{径}\times\left(1+\frac{乾}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{乾^2}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3\times乾^3}{48}\times\frac{15}{48}-\frac{15\times乾^4}{384}\times\frac{105}{384}\right)=\frac{半背}{子\times少}$$

ここで、$\dfrac{径}{截数}$　は　子　なので、両辺にこれを掛けて、

$$2\times円積率\times\left(1+\frac{乾}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{乾^2}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3\times乾^3}{48}\times\frac{15}{48}-\frac{15\times乾^4}{384}\times\frac{105}{384}\right)=\frac{半背}{少}$$

両辺に　２×円積率　を掛けて、整理すると

$$1+\frac{乾}{2^2}-\frac{3\times乾^2}{8^2}+\frac{3\times15\times乾^3}{48^2}-\frac{15\times105\times乾^4}{384^2}=\frac{半背}{2\times円積率\times少}$$

これを括り、倍して、背　とする。

$$半背＝\frac{背}{2}$$

なので、

$$1+\frac{乾}{2^2}-\frac{3\times乾^2}{8^2}+\frac{3\times15\times乾^3}{48^2}-\frac{15\times105\times乾^4}{384^2}=\frac{背}{4\times円積率\times少}$$

ここで、円の面積＝直径×直径×円積率＝半径×半径×円周率なので
４×円積率＝円周率。したがって、

$$1+\frac{乾}{2^2}-\frac{3\times乾^2}{8^2}+\frac{3\times15\times乾^3}{48^2}-\frac{15\times105\times乾^4}{384^2}=\frac{背}{円周率\times少}$$

両辺に、少×円周率　を掛けて、

$$少\times円周率+\frac{乾\times少\times円周率}{2^2}-\frac{3\times乾\times乾\times少\times円周率}{4^2\times2^2}$$

$$+\frac{3\times5\times乾\times3\times乾^2\times少\times円周率}{6^2\times4^2\times2^2}$$

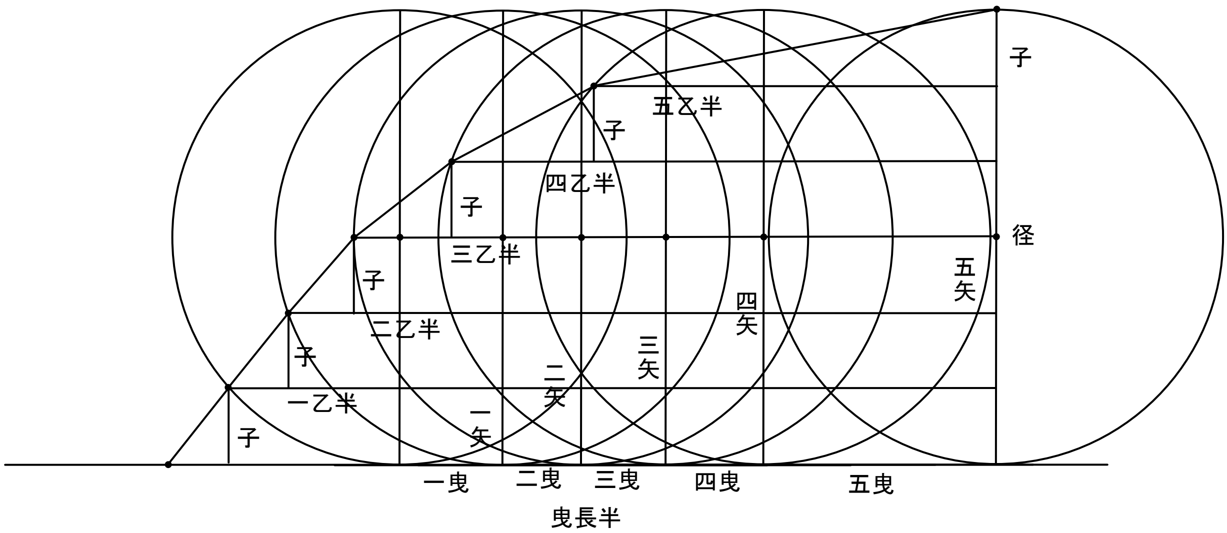
$$-\frac{5\times7\times乾\times3^2\times5\times乾^3\times少\times円周率}{8^2\times6^2\times4^2\times2^2}=背$$

赤い文字は、前の項と同じ。順に原数，一差，二差，三差，・・・とする。

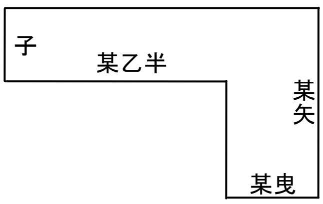
$$少\times円周率+\frac{乾\times原数}{2^2}-\frac{1\times3\times乾\times一差}{4^2}+\frac{3\times5\times乾\times二差}{6^2}-\frac{5\times7\times乾\times三差}{8^2}=背$$

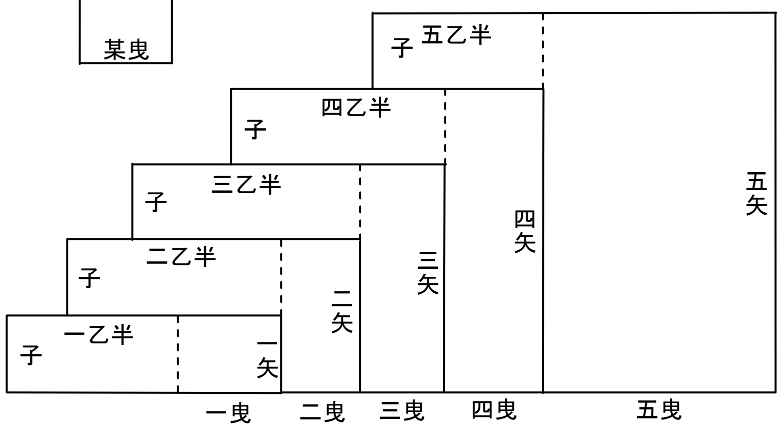
これは、多を長径とし、少を短径として求める、側円周と全く同じ。
ゆえ、多を長径に擬え（なぞらえ）、少を短径に擬え、術に依って側円周を求め、点跡弧背とする。

点跡弧積　を求める



某積半之図





$\dfrac{\text{径}}{\text{截数}} = \text{子}$　，　$\dfrac{\text{子} \times \text{曳長}}{\text{円周率} \times \text{某乙}} = \text{某曳}$　，　$\text{天} \times \text{径} = \text{某矢}$

（上の２つ目の式は、前の方で　次のように導いたもの）

比例式	径×円周率	某背
	曳長	某曳

比例より

$\dfrac{\text{某背} \times \text{曳長}}{\text{径} \times \text{円周率}} = \text{某曳}$　とする。

某背　を解く。

$\dfrac{\text{子} \times \text{曳長}}{\text{円周率} \times \text{某乙}} = \text{某曳}$　なり。

$子 \times 某乙 + 2 \times 某矢 \times 某曳 = 某積$

これまでの図解は、点跡弧の半分について表していたが、
この某積からは、点跡弧の残りの半分も入れて、点跡弧全体の話にしている。

某曳　および　某矢　を解く

$$子 \times 某乙 + \frac{2 \times 子 \times 天 \times 径 \times 曳長}{円周率 \times 某乙} = 某積$$

子×某乙　を畳んで、円の面積　とする。

$\dfrac{2 \times 子 \times 天 \times 径 \times 曳長}{円周率 \times 某乙}$　は、子を解いて、乙除偶乗表に依って　畳む。

$\dfrac{2 \times 径 \times 曳長}{円周率} \times 子 \times \dfrac{天}{某乙}$　と変形して

乙除偶乗表　の　一部を再掲する

乙除偶乗表	
$\dfrac{2 \times 截数 \times 円積率}{径}$	$\dfrac{1}{某乙}$
$\dfrac{2 \times 截数 \times 円積率}{2 \times 径}$	$\dfrac{天}{某乙}$
$\dfrac{2 \times 截数 \times 円積率 \times 3}{8 \times 径}$	$\dfrac{天^2}{某乙}$

畳む　と、

$\dfrac{2 \times 径 \times 曳長}{円周率} \times \dfrac{径}{截数} \times \dfrac{2 \times 截数 \times 円積率}{2 \times 径}$　となる。

約分して

$\dfrac{2 \times 径 \times 曳長}{円周率} \times 円積率$　となる

また、円の面積＝径×径×円積率　なので

２×円積率　を　円周率の半分　に変えて　乗除等数を省き（約分して）積　とする。

$$径^2 \times 円積率 + \frac{径 \times 曳長}{2} = 積$$

これをもって、答術を施すときは、

術曰　置曳長以円周率除之$^{加}_{減}$輪径擬$^{長}_{短}$径依術求側円周為点跡弧背

置曳長半之加輪径因円積率乗輪径得積合問