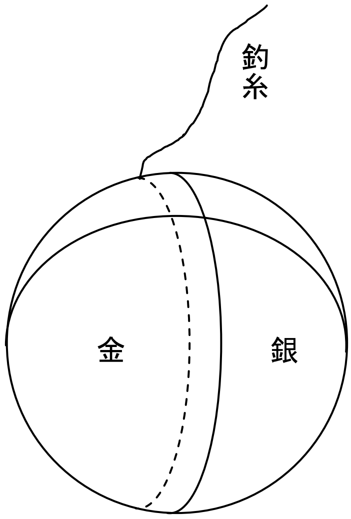

図１

今有如左図半金半銀球欲其中心鈎垂之球
径八寸金一積重一百二十五銭銀一積重
七十五銭問従球心至釣垂線心厚幾何

　答曰　厚三分七厘五毛

術曰置金重内減銀重余三之以金銀重和
一十六段除之乗球径得厚合問

（問題の意味）
図のように、半分金，半分銀の球の中心
を垂直につるす。
球の直径が８寸，金一積重１２５銭，
銀一積重７５銭のとき、釣垂線心から
球心までの厚さはいくらか。

（術文の意味）

$$厚 = \frac{(金重 - 銀重) \times ３ \times 径}{(金重 + 銀重) \times １６}$$

（解義）
重心距術によって子を求める

$$\frac{３ \times 径}{１６} = 子 \qquad ・・・（１）$$

（一点鎖線の中は、私のメモ）

ここでも、突然『重心距術によって』と
して、半球の重心の位置を書いています。

現代的に半球の重心の位置を求めることに
します。

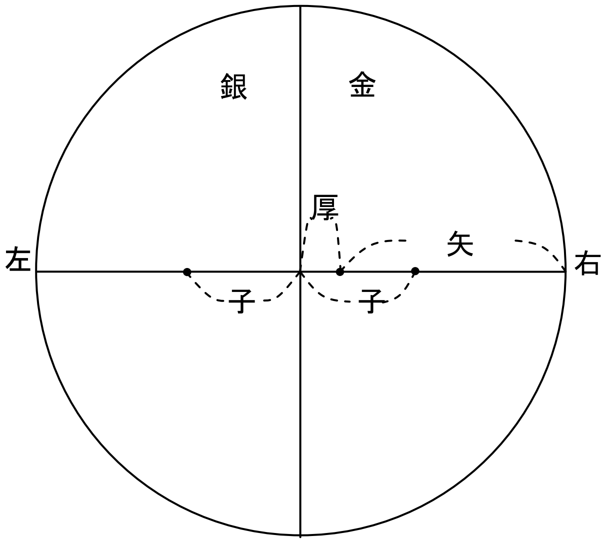

図２

（現代的に半球の重心を求める。）

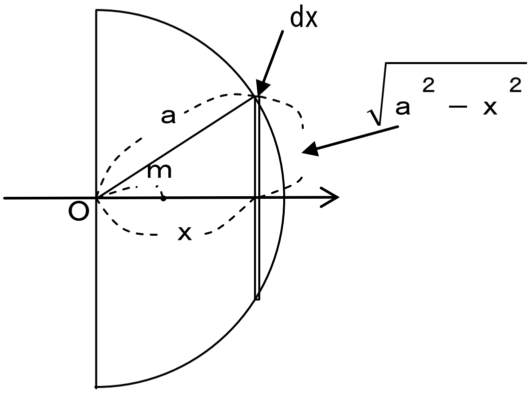

図３

「重心問題を考える基礎」で、一般に、
つり合う点の目盛mは、次のように
表せることを学びました。

$$m=\frac{(目盛\times 重さ)の和}{全体の重さの和}$$

これを、図３に応用します。
図３は、半球をｘ軸に垂直な平面で厚さ dx の
輪切りにしたものです。
半球は均質な物質で出来ていると考えると、重さは体積に比例するので

$$m=\frac{\int_0^a \pi x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx}{\int_0^a \pi\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx}=\frac{\int_0^a \pi x\left(a^2-x^2\right)dx}{\int_0^a \pi\left(a^2-x^2\right)dx}=\frac{\pi\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}$$

$$m=\frac{\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}=\frac{\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}}{a^3-\frac{a^3}{3}}=\frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2a^3}{3}}=\frac{a^4}{4}\times\frac{3}{2a^3}=\frac{3a}{8}$$

ここで、ａは半径なので、２ａ＝径，ｍ＝子　と変えて

$$子=\frac{3\times 径}{16}$$

と、（１）の式が求められます。

$$\frac{径^3\times 玉積率}{2}=半玉積 \qquad ・・・（２）$$

半球の体積を求めている。

$$半球の体積=\frac{2\times 円周率}{3}\times 半径^3=\frac{2\times 円周率}{3}\times\left(\frac{径}{2}\right)^3=\frac{2\times 円周率}{3}\times\frac{径^3}{8}$$

$$半球の体積=\frac{円周率}{6}\times\frac{径^3}{2}$$

$$玉積率 = \frac{円周率}{6}$$

なので、(2)となります。

重和をかけて、径を割って

重和とは、金の比重と銀の比重を加えたものです。
金，銀ともに半球で同じ体積なので、比重を先に足しても問題ないと思います。
半球の体積に、重和をかけることで、球全体の重量となります。
いつものように、径を球全体の重量で割って、率とします。

$$径 \div (半玉積 \times 重和) = 径 \times \frac{1}{半玉積 \times (金重 + 銀重)}$$

$$\frac{径}{半玉積 \times (金重 + 銀重)} = 率$$　・・・（３）

左重を求めます。（前問で覚えた関係を使います。）

$$(半円径 - 子) \times 金重 \times 半玉積 + (半円径 + 子) \times 銀重 \times 半玉積 = 径 \times 左重$$

$$\frac{(半円径 - 子) \times 金重 \times 半玉積 + (半円径 + 子) \times 銀重 \times 半玉積}{径} = 左重$$　・・・（４）

図４のように考えると、
右という点のまわりのモーメントは
右まわりのモーメント＝全重×矢
左まわりのモーメント＝左重×径
つり合っているので
全重×矢＝左重×径
したがって

$$矢 = \frac{左重 \times 径}{全重} = 左重 \times 率$$

ということになります。

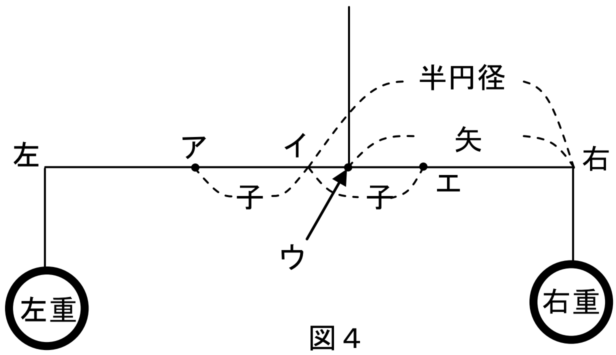

図４

（４）に率をかけて解く

$$\frac{(半円径 - 子) \times 金重 \times 半玉積 + (半円径 + 子) \times 銀重 \times 半玉積}{径} \times \frac{径}{半玉積 \times (金重 + 銀重)}$$

$$= \frac{(半円径 - 子) \times 金重 + (半円径 + 子) \times 銀重}{金重 + 銀重} = 矢$$

（１）から子を径で表し、半円径も径で表すと

$$\frac{\left(\frac{径}{2}-\frac{３\times 径}{１６}\right)\times 金重+\left(\frac{径}{2}+\frac{３\times 径}{１６}\right)\times 銀重}{金重+銀重}=矢$$

$$\frac{\frac{５\times 径}{１６}\times 金重+\frac{１１\times 径}{１６}\times 銀重}{金重+銀重}=矢$$

$$\left(５\times 金重+１１\times 銀重\right)\times\frac{径}{１６\times\left(金重+銀重\right)}=矢 \qquad ・・・（５）$$

図２から　厚＝半円径ー矢

（５）を径の半分から引いて

$$\frac{径}{2}-\left(５\times 金重+１１\times 銀重\right)\times\frac{径}{１６\times\left(金重+銀重\right)}=厚$$

$$\left(８\times 金重+８\times 銀重-５\times 金重-１１\times 銀重\right)\times\frac{径}{１６\times\left(金重+銀重\right)}=厚$$

$$\left(３\times 金重-３\times 銀重\right)\times\frac{径}{１６\times\left(金重+銀重\right)}=厚$$

$$\frac{３\times\left(金重-銀重\right)\times 径}{１６\times\left(金重+銀重\right)}=厚 \qquad ・・・（６）$$

術文と同じ式になりました。