

$\frac{\text{弦}}{\text{截数}} = \text{子}$ とする。

某段数を掛けて

$\frac{\text{弦} \times \text{某段数}}{\text{截数}} = \text{某平}$ とする。

$$\frac{\text{某段数}}{\text{截数}} = \text{天} \text{ と名づける}$$

これを括る。

$\text{弦} \times \text{天} = \text{某平}$

図2において、鉤股弦の術（三平方の定理、ピタゴラスの定理）から

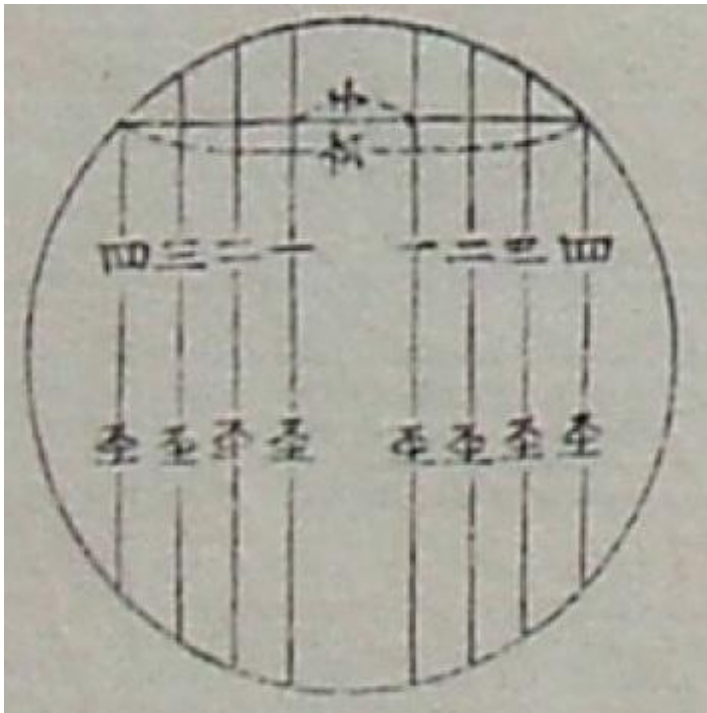
$$\text{径}^2 - \text{某平}^2 = \text{某径}^2$$


図1

$\text{径}^2 - \text{某平}^2 = \text{某径}^2$

某平² を解き、径² で割る。

某平² を解くと

$$\text{径}^2 - \text{弦}^2 \times \text{天}^2 = \text{某径}^2$$

径² で割ると

$$1 - \frac{\text{弦}^2 \times \text{天}^2}{\text{径}^2} = \frac{\text{某径}^2}{\text{径}^2}$$

$$\frac{\text{弦}^2}{\text{径}^2} = \text{率} \text{ と名づける}$$

これを括る。

$$1 - \text{率} \times \text{天}^2 = \frac{\text{某径}^2}{\text{径}^2}$$

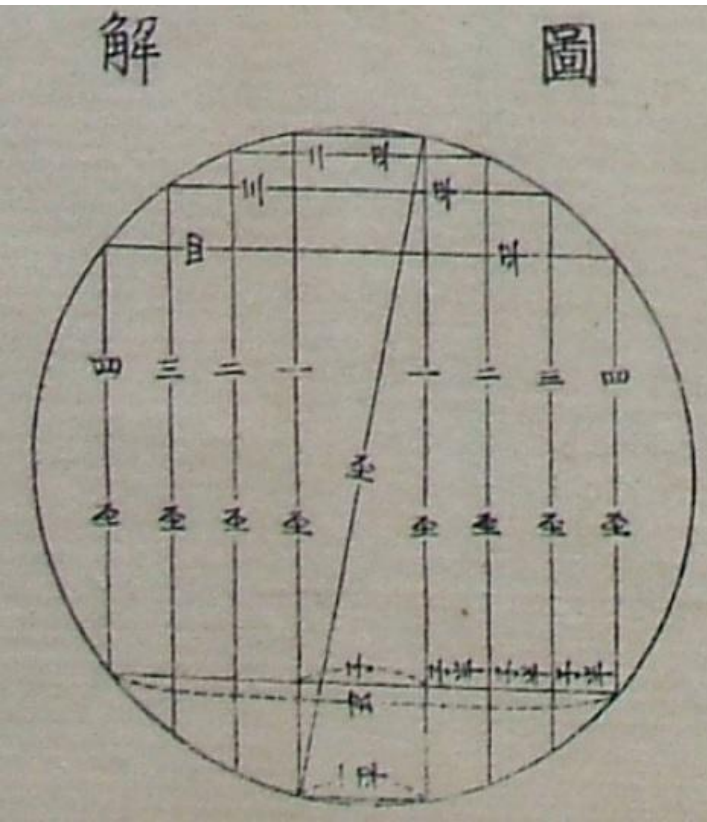


図2

地幕と名づける。平方綴術にこれを開き、地とする。

「平方綴術（へいほうてつじゅつ）に開く」とは、 $\sqrt{1-h}$ を級数展開すること。

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \\ &= 1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{(\text{率} \times \text{天}^2)^2}{8} - \frac{3 \times (\text{率} \times \text{天}^2)^3}{48} - \frac{15 \times (\text{率} \times \text{天}^2)^4}{384} \dots \\ &= 1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \dots = \frac{\text{某径}}{\text{径}} \end{aligned}$$

$$1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \dots = \frac{\text{某径}}{\text{径}}$$

地と名づける。

地 × 某径 = 径

奇除表

$$1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \dots = \text{地}$$

これを 実 とし。

$$1 - \text{率} \times \text{天}^2 = \text{地}^2$$

これを 法 として、帰除綴術にこれを除き、地で1を割る数を得る。

「帰除綴術にこれを除く」とは、分数式の級数展開を行うことを言います。

$$\sqrt{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = \text{地} \quad \text{のときに}$$

$$\frac{1}{\text{地}^2} = \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = \frac{1 - \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = 1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}$$

と表せる。この式の変形を繰り返して行くことで、分数式の級数展開ができます。

ここでは、地を地²で割った式を級数展開するので、詳細は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{地}}{\text{地}^2} &= \frac{\text{地}}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = \text{地} \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right) = \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right) \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right) \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{地} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{地} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right) \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{地} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{地} \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 \\
 &\quad \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{地} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{地} \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right) \\
 &= \text{地} + \text{地} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \text{地} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{地} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{地} \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 \\
 &\quad + \text{地} \times \text{率}^5 \times \text{天}^{10} \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}
 \end{aligned}$$

ここで、地に平方綴術で求めた級数を代入する。

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \\
 & + \left(1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \right) \times \text{率} \times \text{天}^2 \\
 & + \left(1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \right) \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 \\
 & + \left(1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \right) \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 \\
 & + \left(1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \right) \times \text{率}^4 \times \text{天}^8
 \end{aligned}$$

ここでは、天の9乗以上は省略する。

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} - \frac{3 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} - \frac{15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} \\
 & + \text{率} \times \text{天}^2 - \frac{\text{率}^2 \times \text{天}^4}{2} - \frac{\text{率}^3 \times \text{天}^6}{8} - \frac{3 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{48} \\
 & + \text{率}^2 \times \text{天}^4 - \frac{\text{率}^3 \times \text{天}^6}{2} - \frac{\text{率}^4 \times \text{天}^8}{8} + \text{率}^3 \times \text{天}^6 - \frac{\text{率}^4 \times \text{天}^8}{2} + \text{率}^4 \times \text{天}^8 \\
 & = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \times \text{率} \times \text{天}^2 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{48} \right) \\
 & \quad \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{48} - \frac{15}{384} \right) \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 \\
 & = 1 + \frac{1}{2} \times \text{率} \times \text{天}^2 + \frac{3}{8} \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \frac{15}{48} \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \frac{105}{384} \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}}
 \end{aligned}$$

$$1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{2} + \frac{3 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} + \frac{15 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} + \frac{105 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} = \frac{1}{\text{地}} = \frac{\text{徑}}{\text{某徑}}$$

これを 実 として 地² を 法 として帰除綴術にこれを除き、地³で1を割る数を求める。

$$1 + \frac{3 \times \text{率} \times \text{天}^2}{2} + \frac{15 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} + \frac{105 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} + \frac{945 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} = \frac{1}{\text{地}^3}$$

$$= \frac{\text{径}^3}{\text{某径}^3}$$

同様に計算を進めて

$$3 + \frac{15 \times \text{率} \times \text{天}^2}{2} + \frac{105 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} + \frac{945 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48} + \frac{11 \times 945 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384}$$

$$= \frac{1}{\text{地}^5} = \frac{3 \times \text{径}^5}{\text{某径}^5}$$

$$15 + \frac{105 \times \text{率} \times \text{天}^2}{2} + \frac{945 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4}{8} + \frac{11 \times 945 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6}{48}$$

$$+ \frac{11 \times 13 \times 945 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8}{384} = \frac{1}{\text{地}^7} = \frac{15 \times \text{径}^7}{\text{某径}^7}$$

$\frac{1}{\text{地}^5}$ と $\frac{1}{\text{地}^7}$ は、本文と少しちがうことになった。

卷之二 立表第六 とは合っているので、良いと思う。後で検証します。

このように計算を進め、表を立てて、奇除表と名づける。

偶除表

1を實とし、地²を法として、帰除綴術にこれを除き、地²で1を割る数を得る。

「帰除綴術にこれを除く」とは、分数式の級数展開を行うことです。

$1 - \text{率} \times \text{天}^2 = \text{地}^2$ なので次のように変形できる。

$$\frac{1}{\text{地}^2} = \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = \frac{1 - \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = 1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} = 1 + \text{率} \times \text{天}^2 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right)$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right)$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{率}^3 \times \text{天}^6 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{率}^3 \times \text{天}^6 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right)$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{率}^4 \times \text{天}^8 \times \frac{1}{1 - \text{率} \times \text{天}^2}$$

$$= 1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{率}^4 \times \text{天}^8 \times \left(1 + \frac{\text{率} \times \text{天}^2}{1 - \text{率} \times \text{天}^2} \right)$$

ここでは、天の9乗以上は省略する。

$$1 + \text{率} \times \text{天}^2 + \text{率}^2 \times \text{天}^4 + \text{率}^3 \times \text{天}^6 + \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}^2} = \frac{\text{径}^2}{\text{某径}^2}$$

実際の本文に書かれている順番と少し変えています。

読んで理解した順に書いているので、文章の途中に式を書いています。

これを実とし、地²を法として、帰除綴術にこれを除き、地⁴で1を割る数を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{地^4} &= \frac{\frac{1}{地^2}}{1 - 率 \times 天^2} = \frac{1 + 率 \times 天^2 + 率^2 \times 天^4 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= \frac{\left(1 - 率 \times 天^2\right) + 率 \times 天^2 + 率 \times 天^2 + 率^2 \times 天^4 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + \frac{2 \times 率 \times 天^2 + 率^2 \times 天^4 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + \frac{\left(2 \times 率 \times 天^2 - 2 \times 率^2 \times 天^4\right) + 2 \times 率^2 \times 天^4 + 率^2 \times 天^4 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + \frac{3 \times 率^2 \times 天^4 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + \frac{\left(3 \times 率^2 \times 天^4 - 3 \times 率^3 \times 天^6\right) + 3 \times 率^3 \times 天^6 + 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + 3 \times 率^2 \times 天^4 + \frac{4 \times 率^3 \times 天^6 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + 3 \times 率^2 \times 天^4 + \frac{\left(4 \times 率^3 \times 天^6 - 4 \times 率^4 \times 天^8\right) + 4 \times 率^4 \times 天^8 + 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + 3 \times 率^2 \times 天^4 + 4 \times 率^3 \times 天^6 + \frac{5 \times 率^4 \times 天^8}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + 3 \times 率^2 \times 天^4 + 4 \times 率^3 \times 天^6 \\
 &\quad + \frac{\left(5 \times 率^4 \times 天^8 - 5 \times 率^5 \times 天^{10}\right) + 5 \times 率^5 \times 天^{10}}{1 - 率 \times 天^2} \\
 &= 1 + 2 \times 率 \times 天^2 + 3 \times 率^2 \times 天^4 + 4 \times 率^3 \times 天^6 + 5 \times 率^4 \times 天^8
 \end{aligned}$$

ここでは、天の9乗以上は省略しているので。

$$1 + 2 \times \text{率} \times \text{天}^2 + 3 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + 4 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + 5 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}^4} = \frac{\text{径}^4}{\text{某径}^4}$$

おなじように、地²で割る計算を繰り返して次の式が得られる。

$$1 + 3 \times \text{率} \times \text{天}^2 + 6 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + 10 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + 15 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}^6} = \frac{\text{径}^6}{\text{某径}^6}$$

$$1 + 4 \times \text{率} \times \text{天}^2 + 10 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + 20 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + 35 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}^8} = \frac{\text{径}^8}{\text{某径}^8}$$

$$1 + 5 \times \text{率} \times \text{天}^2 + 15 \times \text{率}^2 \times \text{天}^4 + 35 \times \text{率}^3 \times \text{天}^6 + 70 \times \text{率}^4 \times \text{天}^8 = \frac{1}{\text{地}^{10}} = \frac{\text{径}^{10}}{\text{某径}^{10}}$$

このように計算を進め、表を立てて、偶除表と名づける。