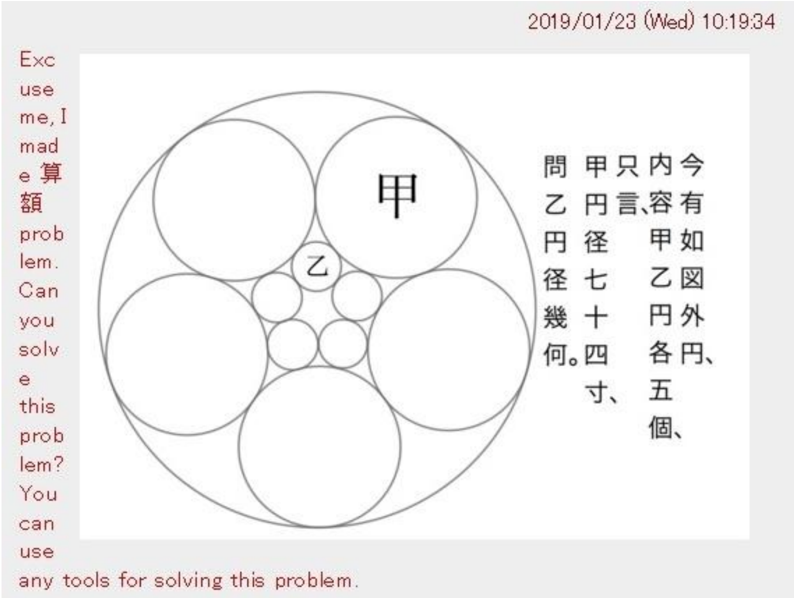
Ｔｏｎｙ　さんの問題　（掲示板に投稿して戴いた問題です。）



〔問題の意味〕

図のように、外円の中に、甲円と乙円がそれぞれ５個ずつ接しています。
甲円の直径が７４寸のとき、乙円の直径は何寸でしょうか。

〔解法例〕

図２のように作図する。

５つの甲円の中心を順に
ア，イ，ウ，エ，オ とする。
五角形アイウエオは、
正五角形となる。
外円の中心を カ とする。
カを中心に、半径カウの
補助円を破線で描くと
ア，イ，ウ，エ，オは
すべて補助円の円周上に
あることがわかる。
線分イウの中点をキとする。
キは２つの甲円の接点と
なる。
線分アウと線分オイの
交点をクとする。
線分カキが通る乙円の中心をケとする。
ケから線分カコへ下した垂線の足をコとする。
コはケを中心とする乙円と次の乙円の接点となる。

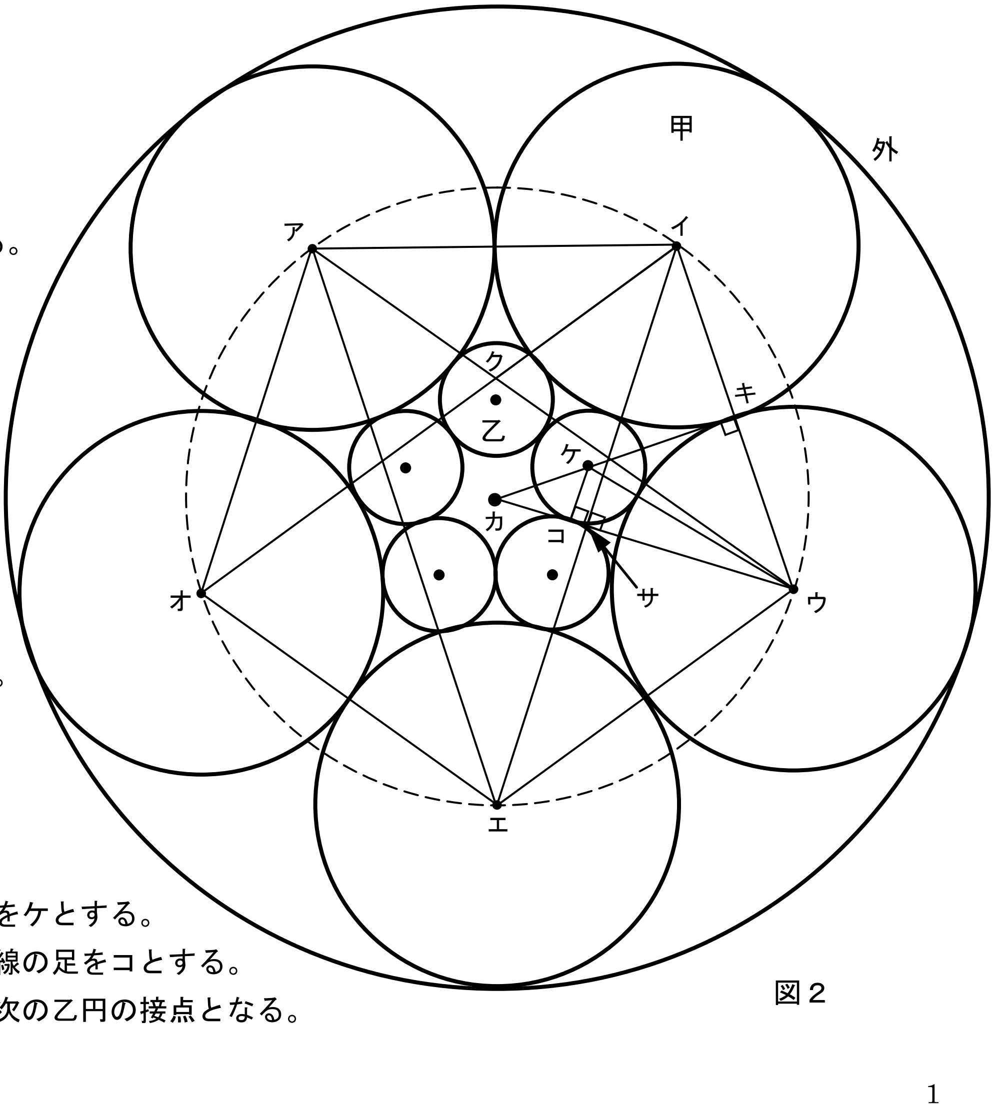


図２

線分イエと線分カウの交点をサとする。線分イエと線分カウはサで直交する。

甲円の直径の長さを　甲　，乙円の直径の長さを　乙　とする。
線分アウの長さを　子　とする。線分ウサの長さを　丑　とする。

角イアウと角イエウは、補助円上の弧イウの円周角なので角の大きさが等しい。
線分アオと線分エウは、それぞれ正五角形の辺なので長さが等しい。したがって補助円上の弧アオの円周角アイオと補助円上の弧エウの円周角エイウも大きさが等しい。
三角形アクイと三角形エウイは、２組の角の大きさが等しいので相似。
（アイ）:（アク）＝（エイ）:（エウ）
（アイ）×（エウ）＝（アク）×（エイ）　　　　　・・・（１）

角アイオと角エイキの大きさが等しいので、角アイエと角オイウも大きさが等しい。
角アエイと角アウイは、補助円上の弧アイの円周角なので角の大きさが等しい。
三角形アイエと三角形クイウは、２組の角の大きさが等しいので相似。
（アエ）:（イエ）＝（クウ）:（イウ）
（アエ）×（イウ）＝（イエ）×（クウ）　　　　　・・・（２）

（１），（２）の各辺を加えると
（アイ）×（エウ）＋（アエ）×（イウ）＝（アク）×（エイ）＋（イエ）×（クウ）
（アイ）×（エウ）＋（アエ）×（イウ）＝（イエ）×｛（アク）＋（クウ）｝
（アイ）×（エウ）＋（アエ）×（イウ）＝（イエ）×（アウ）
ここで　（アイ）＝（イウ）＝（ウエ）＝甲，　（アエ）＝（アウ）＝（イエ）＝子　なので
甲×甲＋子×甲＝子×子

$$子^2 - 甲 \times 子 = 甲^2$$

$$\left(子 - \frac{甲}{2}\right)^2 = 甲^2 + \left(\frac{甲}{2}\right)^2$$

両辺の平方根をとって

$$子 - \frac{甲}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \times 甲$$

子は、長さで正数であるため複号のプラスをとって

$$子 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \times 甲$$

直角三角形イサウにおいて、三平方の定理により

$$（ウサ）= \sqrt{（イウ）^2 - （イサ）^2}$$

ここで、(ウサ) $=$ 丑, (イウ) $=$ 甲, (イサ) $= \frac{\text{子}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \text{甲}$ なので

$$\text{丑} = \sqrt{\text{甲}^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \text{甲}\right)^2} = \sqrt{\text{甲}^2 - \frac{6+2\times\sqrt{5}}{4^2} \times \text{甲}^2} = \frac{\sqrt{10-2\times\sqrt{5}}}{4} \times \text{甲}$$

直角三角形イサウと直角三角形カキウは、角イウサ＝角カウキを共有するので相似

(イウ):(ウサ) $=$ (カウ):(ウキ)

(イウ) $\times$ (ウキ) $=$ (ウサ) $\times$ (カウ)

$$(\text{カウ}) = \frac{(\text{イウ}) \times (\text{ウキ})}{(\text{ウサ})}$$

ここで、(ウサ) $= \text{丑} = \frac{\sqrt{10-2\times\sqrt{5}}}{4} \times \text{甲}$, (イウ) $=$ 甲, (ウキ) $= \frac{\text{甲}}{2}$ なので

$$(\text{カウ}) = \frac{\text{甲} \times \frac{\text{甲}}{2}}{\frac{\sqrt{10-2\times\sqrt{5}}}{4} \times \text{甲}} = \frac{2}{\sqrt{10-2\times\sqrt{5}}} \times \text{甲}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10+2\times\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\times\sqrt{5}} \times \sqrt{10+2\times\sqrt{5}}} \times \text{甲} = \frac{2 \times \sqrt{10+2\times\sqrt{5}}}{\sqrt{100-20}} \times \text{甲}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{10+2\times\sqrt{5}}}{4 \times \sqrt{5}} \times \text{甲} = \frac{\sqrt{10+2\times\sqrt{5}} \times \sqrt{5}}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} \times \text{甲}$$

$$= \frac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}}{10} \times \text{甲}$$

直角三角形カキウにおいて、三平方の定理より

$$(\text{カキ}) = \sqrt{(\text{カウ})^2 - (\text{キウ})^2}$$

ここで、（カウ）$=\dfrac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}}{10}\times$甲,　（キウ）$=\dfrac{甲}{2}$　なので

（カキ）$=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}\right)^2}{10^2}\times 甲^2-\dfrac{1}{2^2}\times 甲^2}=\dfrac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}-25}}{\sqrt{10^2}}\times$甲

$=\dfrac{\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}}{10}\times$甲

直角三角形カキウと直角三角形カコケは、角ケカコを共有するので相似

（カキ）:（キウ）＝（カコ）:（コケ）

（カキ）×（コケ）＝（キウ）×（カコ）

（カコ）$=\dfrac{（カキ）\times（コケ）}{（キウ）}$

ここで、（カキ）$=\dfrac{\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}}{10}\times$甲,　（コケ）$=\dfrac{乙}{2}$,　（キウ）$=\dfrac{甲}{2}$　なので

（カコ）$=\dfrac{\dfrac{\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}}{10}\times 甲\times\dfrac{乙}{2}}{\dfrac{甲}{2}}=\dfrac{\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}}{10}\times$乙　　・・・（３）

また

（カコ）＝（カウ）－（コウ）

ここで、（カウ）$=\dfrac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}}{10}\times$甲,

（コウ）$=\sqrt{（ケウ）^2-（コケ）^2}=\sqrt{\left(\dfrac{甲}{2}+\dfrac{乙}{2}\right)^2-\left(\dfrac{乙}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(甲+乙)^2-乙^2}$　なので

（カコ）$=\dfrac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}}{10}\times 甲-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(甲+乙)^2-乙^2}$　　・・・（４）

（３）、（４）より

$$\frac{\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}}{10}\times 乙=\frac{\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}}{10}\times 甲-\frac{1}{2}\times\sqrt{(甲+乙)^2-乙^2}$$

$$\sqrt{50+10\times\sqrt{5}}\times 甲-\sqrt{25+10\times\sqrt{5}}\times 乙=5\times\sqrt{甲^2+2\times 甲\times 乙}$$

$$\sqrt{5}\times\sqrt{10+2\times\sqrt{5}}\times 甲-\sqrt{5}\times\sqrt{5+2\times\sqrt{5}}\times 乙=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{甲^2+2\times 甲\times 乙}$$

$$\sqrt{10+2\times\sqrt{5}}\times 甲-\sqrt{5+2\times\sqrt{5}}\times 乙=\sqrt{5}\times\sqrt{甲^2+2\times 甲\times 乙}$$

両辺を２乗して

$$\left(10+2\times\sqrt{5}\right)\times 甲^2-2\times\sqrt{10+2\times\sqrt{5}}\times\sqrt{5+2\times\sqrt{5}}\times 甲\times 乙+\left(5+2\times\sqrt{5}\right)\times 乙^2$$

$$=5\times\left(甲^2+2\times 甲\times 乙\right)$$

$$\left(5+2\times\sqrt{5}\right)\times 甲^2-2\times\left(5+\sqrt{10+2\times\sqrt{5}}\times\sqrt{5+2\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\times 乙$$

$$+\left(5+2\times\sqrt{5}\right)\times 乙^2=0$$

$$乙^2-\frac{2\times\left(5+\sqrt{10+2\times\sqrt{5}}\times\sqrt{5+2\times\sqrt{5}}\right)}{5+2\times\sqrt{5}}\times 甲\times 乙+甲^2=0$$

$$乙^2-\frac{2\times\left(5+\sqrt{70+30\times\sqrt{5}}\right)\times\left(5-2\times\sqrt{5}\right)}{\left(5+2\times\sqrt{5}\right)\times\left(5-2\times\sqrt{5}\right)}\times 甲\times 乙+甲^2=0$$

$$乙^2-\frac{2\times\left(25+5\times\sqrt{70+30\times\sqrt{5}}-10\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{70+30\times\sqrt{5}}\right)}{25-20}\times 甲\times 乙+甲^2=0$$

$$乙^{2}-\frac{2\times\left(25+5\times\sqrt{70+30\times\sqrt{5}}-10\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)}{5}\times 甲\times 乙+甲^{2}=0$$

$$乙^{2}-\frac{2\times\left(25+5\times\sqrt{70+30\times\sqrt{5}}-10\times\sqrt{5}-2\times 5\times\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)}{5}\times 甲\times 乙+甲^{2}=0$$

$$乙^{2}-2\times\left(5+\sqrt{5}\times\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}-2\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\times 乙+甲^{2}=0$$

$$乙^{2}-2\times\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\times 乙+甲^{2}=0$$

$$\left\{乙-\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\right\}^{2}$$
$$=-甲^{2}+\left\{\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\right\}^{2}$$

$$\left\{乙-\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲\right\}^{2}$$
$$=\left\{\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)^{2}-1\right\}\times 甲^{2}$$

両辺の平方根をとって

$$乙-\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\times 甲$$
$$=\pm\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)^{2}-1}\times 甲$$

$$乙=\left\{\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left\{\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\right\}^{2}-1}\right\}\times 甲$$

$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.23606797749978969640917 4$　とする

部分を先に計算する。

$$\sqrt{14+6\times\sqrt{5}} \fallingdotseq \sqrt{14+6\times 2.236067977499789696409174}$$

$$= \sqrt{14+13.416407864998738178455044}$$

$$= \sqrt{27.416407864998738178455044}$$

$$\fallingdotseq 5.236067977500$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}} \fallingdotseq 2.236067977500+5.236067977500$$

$$= 7.472135955000$$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)$$

$$\fallingdotseq (2.236067977500-2)\times(7.472135955000)$$
$$= (0.236067977500)\times(7.472135955000)$$
$$\fallingdotseq 1.763932022502$$

$$\sqrt{\left\{\left(\sqrt{5}-2\right)\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{14+6\times\sqrt{5}}\right)\right\}^2-1} = \sqrt{\{1.763932022502\}^2-1}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{3.111456180008-1} = \sqrt{2.111456180008}$$

$$\fallingdotseq 1.453085$$

乙 $\fallingdotseq \{(1.763932)\pm(1.453085)\}\times$ 甲

乙は甲よりも小さいので、複号のマイナス側を採用して

乙 $\fallingdotseq 0.310847\times$ 甲

甲 $= 74$　とすると

乙 $\fallingdotseq 0.310847\times 74 = 23.002678$

答え　　乙円の直径は　およそ　２３．００２６７８寸

平成３１年（２０１９年）４月２日