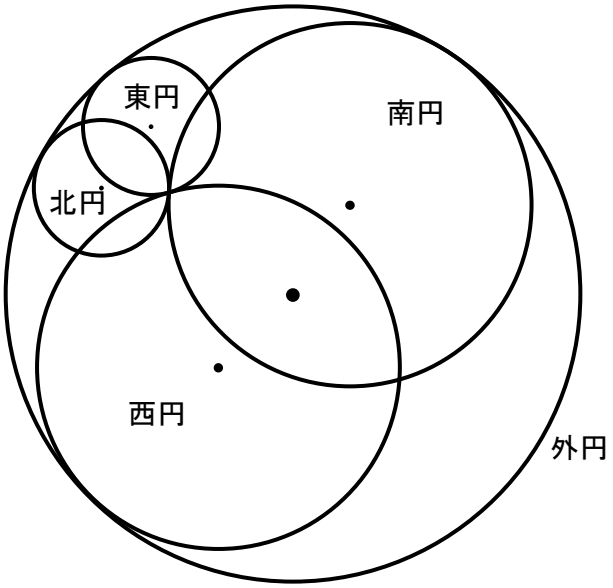
群馬の算額　５１－１　稲荷神社　　文政１１年



今有如図円内容四円各周一処相交
南円径四寸北円径三寸
東円径二寸
問西円径幾何

〔問題の意味〕

図のように、外円の中に１点で交わる４個の円を容れる。
南円の直径が４寸、北円の直径が３寸、東円の直径が２寸のとき、
西円の直径はいくらか。
（南円と北円は、接している。東円と西円は、接している。）

〔解法例〕

図２のように、作図する。
外円の中心を　ア，東円の中心を　イ，
西円の中心を　ウ，南円の中心を　エ，
北円の中心を　オとする。
東円，西円，南円，北円が１点で
交わる点を　カとする。
外円と東円の接点を　キ，
外円と西円の接点を　ク，
外円と南円の接点を　ケ
外円と北円の接点を　コとする。
アから線分エオへ下した垂線の足を
サとする。

外円の直径を　外，東円の直径を　東，
西円の直径を　西，南円の直径を　南，
北円の直径を　北とする。

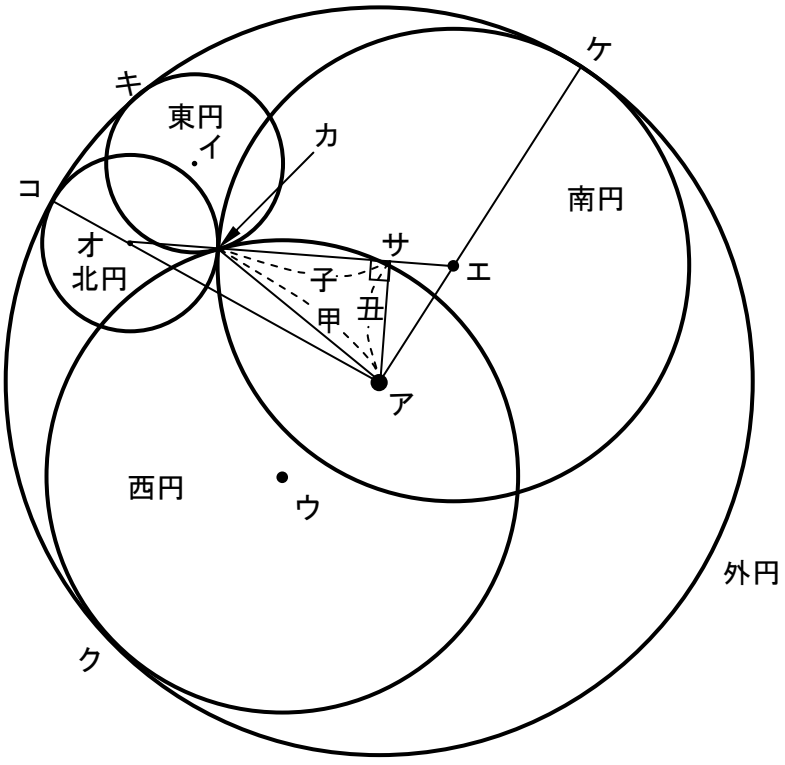


図２

線分アカの長さを　甲，線分カサの長さを　子，線分アサの長さを　丑とする。
図２から、外，甲は定数。

直角三角形アサカ　で　三平方の定理から

$$(アサ)^2=(アカ)^2-(サカ)^2$$

ここで、$(アサ)=丑$　，$(アカ)=甲$　，$(サカ)=子$　なので

$$丑^2=甲^2-子^2 \qquad \cdots（1）$$

直角三角形アサエ　で　三平方の定理から

$$(アサ)^2=(アエ)^2-(サエ)^2$$

ここで、$(アサ)=丑$　，$(アエ)=\frac{外}{2}-\frac{南}{2}$　，$(サエ)=\frac{南}{2}-子$　なので

$$丑^2=\left(\frac{外}{2}-\frac{南}{2}\right)^2-\left(\frac{南}{2}-子\right)^2 \qquad \cdots（2）$$

直角三角形アサオ　で　三平方の定理から

$$(アサ)^2=(アオ)^2-(サオ)^2$$

ここで、$(アサ)=丑$　，$(アオ)=\frac{外}{2}-\frac{北}{2}$　，$(サオ)=子+\frac{北}{2}$　なので

$$丑^2=\left(\frac{外}{2}-\frac{北}{2}\right)^2-\left(子+\frac{北}{2}\right)^2 \qquad \cdots（3）$$

(１)，(２)　から　丑　を消去して

$$甲^2-子^2=\left(\frac{外}{2}-\frac{南}{2}\right)^2-\left(\frac{南}{2}-子\right)^2$$

$$甲^2-子^2=\frac{(外-南)^2}{4}-\frac{南^2}{4}+南\times子-子^2$$

$$甲^2=\frac{(外-南)^2-南^2}{4}+南\times子$$

$$南\times子=甲^2-\frac{(外-南)^2-南^2}{4}$$

$$子=\frac{甲^{2}}{南}-\frac{(外-南)^{2}-南^{2}}{4\times南}$$ ・・・（４）

（１），（３） から 丑 を消去して

$$甲^{2}-子^{2}=\left(\frac{外}{2}-\frac{北}{2}\right)^{2}-\left(子+\frac{北}{2}\right)^{2}$$

$$甲^{2}-子^{2}=\frac{(外-北)^{2}}{4}-子^{2}-北\times子-\frac{北^{2}}{4}$$

$$甲^{2}=\frac{(外-北)^{2}-北^{2}}{4}-北\times子$$

$$北\times子=\frac{(外-北)^{2}-北^{2}}{4}-甲^{2}$$

$$子=\frac{(外-北)^{2}-北^{2}}{4\times北}-\frac{甲^{2}}{北}$$ ・・・（５）

（４），（５） から 子 を消去して

$$\frac{甲^{2}}{南}-\frac{(外-南)^{2}-南^{2}}{4\times南}=\frac{(外-北)^{2}-北^{2}}{4\times北}-\frac{甲^{2}}{北}$$

$$甲^{2}\times4\times北-\left\{外^{2}-2\times外\times南+南^{2}-南^{2}\right\}\times北$$

$$=\left\{外^{2}-2\times外\times北+北^{2}-北^{2}\right\}\times南-甲^{2}\times4\times南$$

$$甲^{2}\times4\times北+甲^{2}\times4\times南=\left\{外^{2}-2\times外\times北\right\}\times南+\left\{外^{2}-2\times外\times南\right\}\times北$$

$$甲^{2}\times4\times北+甲^{2}\times4\times南=外^{2}\times南-2\times外\times北\times南+外^{2}\times北-2\times外\times南\times北$$

$$4\times外\times北\times南=外^{2}\times北-甲^{2}\times4\times北+外^{2}\times南-甲^{2}\times4\times南$$

$$4\times外\times北\times南=\left(外^{2}-甲^{2}\times4\right)\times北+\left(外^{2}-甲^{2}\times4\right)\times南$$

$$\left(外^{2}-甲^{2}\times4\right)\times(北+南)=4\times外\times北\times南$$ ・・・（６）

(６)の両辺を、$\left(外^{2}-甲^{2}\times 4\right)\times 北\times 南$　で割って

$$\frac{1}{南}+\frac{1}{北}=\frac{4\times 外}{\left(外^{2}-甲^{2}\times 4\right)} \qquad \cdots(7)$$

（７）において、外，甲は共に定数なので、右辺全体も定数であることがわかる。

次に、図３のように作図して、
アから線分イウへ下した垂線の足を
タとする。

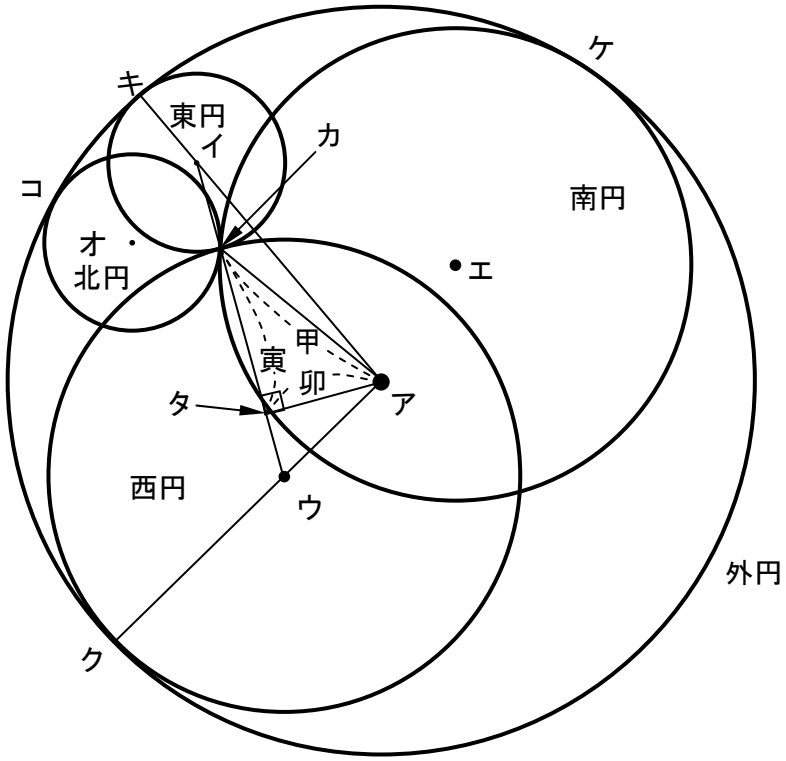


図３

ここで、同じように計算すると、

$$\frac{1}{東}+\frac{1}{西}=\frac{4\times 外}{\left(外^{2}-甲^{2}\times 4\right)} \qquad \cdots(8)$$

となる。

（７），（８）から

$$\frac{1}{東}+\frac{1}{西}=\frac{1}{南}+\frac{1}{北} \qquad \cdots(9)$$

$$\frac{1}{西}=\frac{1}{南}+\frac{1}{北}-\frac{1}{東}$$

$$\frac{1}{西}=\frac{北\times 東+南\times 東-南\times 北}{南\times 北\times 東}$$

$$西=\frac{南\times 北\times 東}{北\times 東+南\times 東-南\times 北} \qquad \cdots(10)$$

南＝４，北＝３，東＝２を入れて

$$西=\frac{4\times 3\times 2}{3\times 2+4\times 2-4\times 3}=\frac{24}{6+8-12}=\frac{24}{2}=12$$

答　　西円の直径は、１２寸