群馬の算額　４４−２　八幡宮

今有如図悌内隔弧背容等円二個
大頭二十〇寸小頭一十五寸
高六寸問等円径幾何

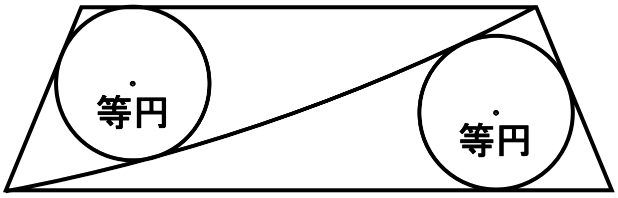
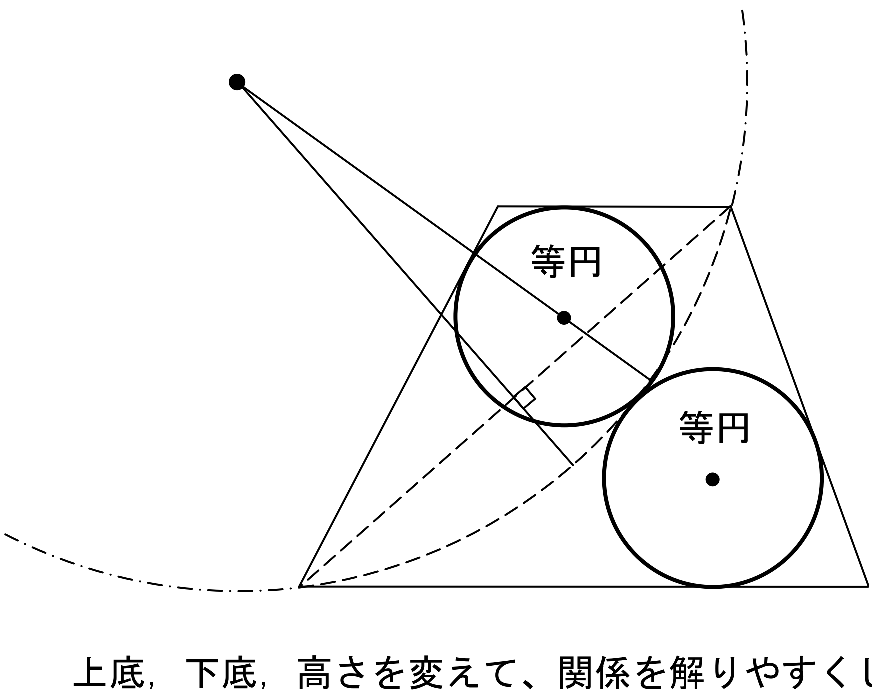


図１

〔問題の意味〕

図のように、下底２０寸，上底１５寸，高さ６寸の台形の中に、大きさが等しい等円２個を、円弧で仕切るように置く。等円は台形の辺および円弧に接する。等円の直径を求めよ。



上底，下底，高さを変えて、関係を解りやすくした図

図２

〔解法例〕

まず、等円であることは考えずに、図３で考えることにする。

図３のように、等円を甲円，乙円の２つに分けて考えを進める。

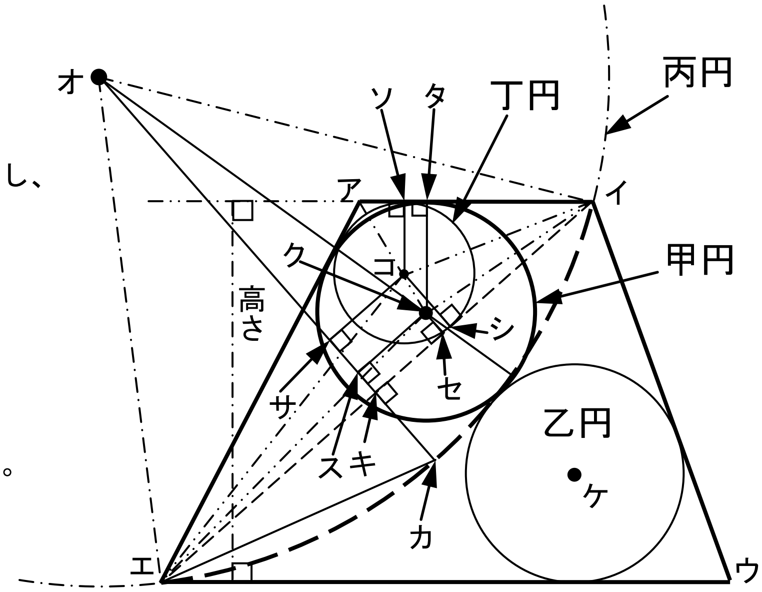


図３

台形アイウエを２つに分ける弧を　弧イエとし、
台形の対角線を　対角線イエとする。
弧イエが含まれる円を、丙円とする。
三角形アイエの内接円を、丁円とする。

甲円の直径を　甲，乙円の直径を　乙，
丙円の直径を　丙，丁円の直径を　丁とする。

弧イエの中点を　カ，
対角線イエの中点を　キとする。

甲円の中心を　ク，乙円の中心を　ケ，丙円の中心を　オ，丁円の中心を　コとする。

コから、線分オキへ下した垂線の足を　サ，線分イエへ下した垂線の足を　シとする。
クから、線分オキへ下した垂線の足を　ス、線分イエへ下した垂線の足を　セとする。
コから、辺アイへ下した垂線の足をソ，クから、辺アイへ下した垂線の足をタとする。

台形アイウエの高さを　高，カキの長さを　子，辺アイの長さを　丑，対角線イエの長さを　寅，
辺エアの長さを　卯，辺イウの長さを　辰，辺ウエの長さを　巳とする。
線分クセの長さを　午とする。線分クスの長さを　未とする。

コから、辺アエへ下した垂線の足を　チ，クから、辺アエへ下した垂線の足を　ツとする。
線分アソの長さを　東とする。
（チ，ツ，については、図３には書いていない。必要になったところで、図５で示す。）

直角三角形オキエで、三平方の定理から

$$(\text{オエ})^2=(\text{オキ})^2+(\text{キエ})^2 \qquad \cdot\cdot\cdot(1)$$

ここで、$(\text{オエ})=\dfrac{\text{丙}}{2}$，　$(\text{オキ})=(\text{オカ})-(\text{キカ})=\dfrac{\text{丙}}{2}-\text{子}$，　$(\text{キエ})=\dfrac{(\text{イエ})}{2}=\dfrac{\text{寅}}{2}$　なので

$$\left(\frac{\text{丙}}{2}\right)^2=\left(\frac{\text{丙}}{2}-\text{子}\right)^2+\left(\frac{\text{寅}}{2}\right)^2$$

$$\text{丙}^2=(\text{丙}-2\times\text{子})^2+\text{寅}^2$$

$$\text{丙}^2 = \text{丙}^2 - 4 \times \text{子} \times \text{丙} + 4 \times \text{子}^2 + \text{寅}^2$$

$$4 \times \text{子} \times \text{丙} = 4 \times \text{子}^2 + \text{寅}^2$$

$$\text{丙} = \text{子} + \frac{\text{寅}^2}{4 \times \text{子}} \qquad \cdots (2)$$

次に、三角形アイエの面積を考える。３つの方法で求め、２つの式を得る。
１つ目の方法は、三角形アイエの面積が、三角形アコイの面積と三角形イコエの面積と三角形エコアの面積の和で表せることを使う。

$$(\text{三角形アイエの面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{アイ}) \times (\text{丁円の半径}) + \frac{1}{2} \times (\text{イエ}) \times (\text{丁円の半径}) + \frac{1}{2} \times (\text{エア}) \times (\text{丁円の半径})$$

$$(\text{三角形アイエの面積}) = \{(\text{アイ}) + (\text{イエ}) + (\text{エア})\} \times \frac{1}{2} \times (\text{丁円の半径})$$

$$(\text{三角形アイエの面積}) = (\text{丑} + \text{寅} + \text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} \qquad \cdots (3)$$

２つ目の方法は、三角形アイエが、台形アイウエの部分の三角形なので、

$$(\text{三角形アイエの面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{アイ}) \times (\text{台形の高さ})$$

$$(\text{三角形アイエの面積}) = \frac{1}{2} \times \text{丑} \times \text{高} \qquad \cdots (4)$$

３つ目の方法は、三角形アイエの３つの辺のみで表すものです。
三角形アイエの周りだけを、図４に示す。
頂点アから辺イエへ下した垂線の足をトとする。
垂線アトの長さを　垂とする。
イトの長さを　右，エトの長さを　左とする。

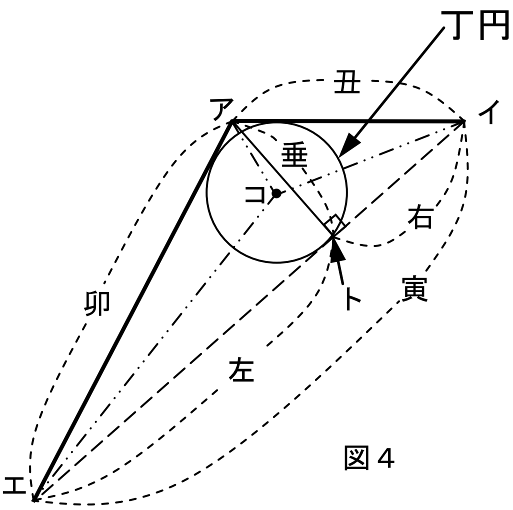


図４

直角三角形アトイで、三平方の定理から

$$(\text{アイ})^2 = (\text{アト})^2 + (\text{イト})^2$$

$$\text{丑}^2 = \text{垂}^2 + \text{右}^2 \qquad \cdots (5)$$

直角三角形アトエで、三平方の定理から

$$(\text{アエ})^2 = (\text{アト})^2 + (\text{エト})^2$$

$$\text{卯}^2 = \text{垂}^2 + \text{左}^2 = \text{垂}^2 + (\text{寅} - \text{右})^2 = \text{垂}^2 + \text{寅}^2 - 2 \times \text{寅} \times \text{右} + \text{右}^2 \qquad \cdots (6)$$

(５), (６)から、$右^2$を消去して

$$卯^2=垂^2+寅^2-2\times寅\times右+丑^2-垂^2$$

$$2\times寅\times右=寅^2-卯^2+丑^2$$

$$右=\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{2\times寅} \qquad \cdots(7)$$

(７)を(５)へ代入して

$$丑^2=垂^2+\left(\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{2\times寅}\right)^2$$

$$垂^2=丑^2-\left(\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{2\times寅}\right)^2$$

両辺の平方根をとって、垂　は長さなので正数であるから

$$垂=\sqrt{丑^2-\left(\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{2\times寅}\right)^2} \qquad \cdots(8)$$

$$(三角形アイエの面積)=\frac{1}{2}\times垂\times寅=\frac{1}{2}\times\sqrt{丑^2-\left(\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{2\times寅}\right)^2}\times寅$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times寅^2\times丑^2-\left(\frac{寅^2+丑^2-卯^2}{寅}\times寅\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\times\sqrt{4\times寅^2\times丑^2-\left(寅^2+丑^2-卯^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\times\sqrt{\left(2\times寅\times丑+寅^2+丑^2-卯^2\right)\times\left(2\times寅\times丑-寅^2-丑^2+卯^2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\times\sqrt{\left\{(丑+寅)^2-卯^2\right\}\times\left\{-(丑-寅)^2+卯^2\right\}}$$

$$(\text{三角形アイエの面積}) = \frac{1}{4} \times \sqrt{(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times (\text{丑}+\text{寅}-\text{卯}) \times (\text{丑}-\text{寅}+\text{卯}) \times (-\text{丑}+\text{寅}+\text{卯})}$$

・・・（9）

（３），（４）から

$$(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} = \frac{1}{2} \times \text{丑} \times \text{高}$$

$$(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \text{丁} = 2 \times \text{丑} \times \text{高}$$

$$\text{丁} = \frac{2 \times \text{丑} \times \text{高}}{\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}}$$

・・・（１０）

（３），（９）から

$$(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} = \frac{1}{4} \times \sqrt{(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times (\text{丑}+\text{寅}-\text{卯}) \times (\text{丑}-\text{寅}+\text{卯}) \times (-\text{丑}+\text{寅}+\text{卯})}$$

$$\text{丁} = \sqrt{\frac{(\text{丑}+\text{寅}-\text{卯}) \times (\text{丑}-\text{寅}+\text{卯}) \times (-\text{丑}+\text{寅}+\text{卯})}{\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}}}$$

・・・（１１）

次に、三角形クイエの面積を考える。三角形クイエの面積は、三角形アイエの面積から、三角形アイクの面積と三角形アクエの面積を引いたものなので

$$(\text{三角形クイエの面積}) = (\text{三角形アイエの面積}) - (\text{三角形アイクの面積}) - (\text{三角形アクエの面積})$$

（３）より

$$(\text{三角形クイエの面積}) = (\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} - \frac{1}{2} \times \text{丑} \times \frac{\text{甲}}{2} - \frac{1}{2} \times \text{卯} \times \frac{\text{甲}}{2}$$

$$(\text{三角形クイエの面積}) = (\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} - (\text{丑}+\text{卯}) \times \frac{\text{甲}}{4}$$

・・・（１２）

また

$$(\text{三角形クイエの面積}) = \frac{1}{2} \times \text{寅} \times \text{午}$$

・・・（１３）

（１２），（１３）より

$$\frac{1}{2} \times \text{寅} \times \text{午} = (\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \frac{\text{丁}}{4} - (\text{丑}+\text{卯}) \times \frac{\text{甲}}{4}$$

$$2 \times \text{寅} \times \text{午} = (\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \text{丁} - (\text{丑}+\text{卯}) \times \text{甲}$$

$$\text{午} = \frac{(\text{丑}+\text{寅}+\text{卯}) \times \text{丁} - (\text{丑}+\text{卯}) \times \text{甲}}{2 \times \text{寅}} = \frac{\text{寅} \times \text{丁} + (\text{丑}+\text{卯}) \times \text{丁} - (\text{丑}+\text{卯}) \times \text{甲}}{2 \times \text{寅}}$$

$$\text{午} = \frac{\text{寅} \times \text{丁} - (\text{丑}+\text{卯}) \times (\text{甲}-\text{丁})}{2 \times \text{寅}} = \frac{\text{寅} \times \text{丁}}{2 \times \text{寅}} - \frac{(\text{丑}+\text{卯}) \times (\text{甲}-\text{丁})}{2 \times \text{寅}}$$

$$\text{午} = \frac{\text{丁}}{2} - \frac{(\text{丑}+\text{卯}) \times (\text{甲}-\text{丁})}{2 \times \text{寅}}$$

・・・（１４）

次に、直角三角形オスクで、三平方の定理から

$$(クス)^2 = (オク)^2 - (オス)^2$$

ここで、$(オク) = \frac{丙}{2} - \frac{甲}{2}$　また、$(スキ) = (クセ)$なので、

$$(オス) = (オカ) - (カキ) - (スキ) = (オカ) - (カキ) - (クセ) = \frac{丙}{2} - 子 - 午$$

$$未^2 = \left(\frac{丙}{2} - \frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{丙}{2} - 子 - 午\right)^2 \quad ・・・（１５）$$

$$未^2 = \left(\frac{丙}{2} - \frac{甲}{2} + \frac{丙}{2} - 子 - 午\right) \times \left(\frac{丙}{2} - \frac{甲}{2} - \frac{丙}{2} + 子 + 午\right) = \left(丙 - \frac{甲}{2} - 子 - 午\right) \times \left(-\frac{甲}{2} + 子 + 午\right)$$

・・・（１６）

（１６）に（２）を代入して

$$未^2 = \left(\frac{寅^2}{4 \times 子} - \frac{甲}{2} - 午\right) \times \left(-\frac{甲}{2} + 子 + 午\right) \quad ・・・（１７）$$

別の方法で　未　を表すことを考える。
図３が複雑になり解りにくいので、これから関係の深い部分を抽出して図５とする。

直角三角形アソコと直角三角形アチコは
合同なので　　$(アソ) = (アチ)$
直角三角形エチコと直角三角形エシコは
合同なので　　$(エチ) = (エシ)$
直角三角形イシコと直角三角形イソコは
合同なので　　$(イシ) = (イソ)$
三角形アイエの周の長さは、

$$2 \times (アソ) + 2 \times (エシ) + 2 \times (イシ)$$
$$= 2 \times (アソ) + 2 \times (イエ)$$

とも書けることが解る。

$$2 \times (アソ) + 2 \times (イエ) = (アイ) + (イエ) + (エア)$$
$$2 \times 東 + 2 \times 寅 = 丑 + 寅 + 卯$$
$$2 \times 東 = 丑 - 寅 + 卯$$
$$東 = \frac{丑 - 寅 + 卯}{2} \quad ・・・（１８）$$

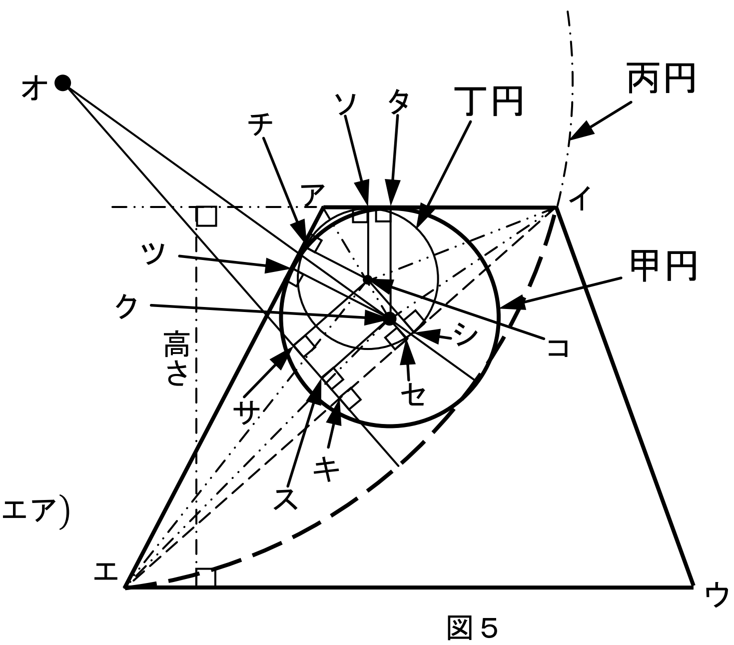


図５

図５で、直角三角形アソコと直角三角形アタクは相似なので

$$(アソ) : (ソコ) = (アタ) : (タク)$$
$$(ソコ) \times (アタ) = (アソ) \times (タク)$$

$$(アタ)=\frac{(アソ)\times(タク)}{(ソコ)}=\frac{東\times\frac{甲}{2}}{\frac{丁}{2}}=\frac{東\times甲}{丁} \qquad ・・・（１９）$$

直角三角形イタクで、三平方の定理から

$$(イク)^2=(イタ)^2+(タク)^2=\{(アイ)-(アタ)\}^2+(タク)^2$$

ここで、$(アイ)=丑$，（１９）より　$(アタ)=\frac{東\times甲}{丁}$，$(タク)=\frac{甲}{2}$　なので

$$(イク)^2=\left(丑-\frac{東\times甲}{丁}\right)^2+\left(\frac{甲}{2}\right)^2 \qquad ・・・（２０）$$

直角三角形アチコと直角三角形アツクの相似から同様にして

$(アチ):(チコ)=(アツ):(ツク)$

$(チコ)\times(アツ)=(アチ)\times(ツク)$

$$(アツ)=\frac{(アチ)\times(ツク)}{(チコ)}=\frac{東\times\frac{甲}{2}}{\frac{丁}{2}}=\frac{東\times甲}{丁} \qquad ・・・（２１）$$

直角三角形エツクで、三平方の定理から

$$(エク)^2=(エツ)^2+(ツク)^2=\{(エア)-(アツ)\}^2+(ツク)^2$$

ここで、$(エア)=卯$，（２１）より　$(アツ)=\frac{東\times甲}{丁}$，$(ツク)=\frac{甲}{2}$　なので

$$(エク)^2=\left(卯-\frac{東\times甲}{丁}\right)^2+\left(\frac{甲}{2}\right)^2 \qquad ・・・（２２）$$

（２２）－（２０）から

$$(エク)^2-(イク)^2=\left(卯-\frac{東\times甲}{丁}\right)^2-\left(丑-\frac{東\times甲}{丁}\right)^2$$

$$=\left(卯-\frac{東\times甲}{丁}+丑-\frac{東\times甲}{丁}\right)\times\left(卯-\frac{東\times甲}{丁}-丑+\frac{東\times甲}{丁}\right)$$

$$(エク)^2-(イク)^2=\left(卯+丑-2\times\frac{東\times甲}{丁}\right)\times(卯-丑) \qquad ・・・（２３）$$

（２３）に（１８）を代入して（　丑と卯　の式の中なので、東　を解いてみる。）

$$(エク)^2-(イク)^2=\left\{卯+丑-\frac{(丑-寅+卯)\times甲}{丁}\right\}\times(卯-丑)$$

$$(エク)^2-(イク)^2=\left\{\frac{(丑-寅+卯)\times甲}{丁}-(丑+卯)\right\}\times(丑-卯)$$

$$=\left\{\frac{(丑-寅+卯)\times甲-(丑+卯)\times丁}{丁}\right\}\times(丑-卯)$$

$$=\frac{(丑-寅+卯)\times甲-(丑-寅+卯)\times丁-寅\times丁}{丁}\times(丑-卯)$$

$$=\frac{(丑-寅+卯)\times(甲-丁)-寅\times丁}{丁}\times(丑-卯)$$

(19)から　$丑-寅+卯=2\times東$　なので　（もう一度くくって）

$$(エク)^2-(イク)^2=\frac{2\times東\times(甲-丁)-寅\times丁}{丁}\times(丑-卯)$$

$$(エク)^2-(イク)^2=\left\{\frac{2\times東}{丁}\times(甲-丁)-寅\right\}\times(丑-卯) \qquad \cdots(24)$$

もうひとつの方法で、　$(エク)^2-(イク)^2$　を求める

直角三角形エセクで三平方の定理から

$$(エク)^2=(エセ)^2+(セク)^2$$

ここで、$(エセ)=(エキ)+(キセ)=\dfrac{(イエ)}{2}+(スク)=\dfrac{寅}{2}+未$　，$(セク)=午$　なので

$$(エク)^2=\left(\frac{寅}{2}+未\right)^2+午^2 \qquad \cdots(25)$$

直角三角形イセクで三平方の定理から

$$(イク)^2=(イセ)^2+(セク)^2$$

ここで、$(イセ)=(イキ)-(キセ)=\dfrac{(イエ)}{2}-(スク)=\dfrac{寅}{2}-未$　，$(セク)=午$　なので

$$(イク)^2=\left(\frac{寅}{2}-未\right)^2+午^2 \qquad \cdots(26)$$

（２５）－（２６）から

$$(エク)^2-(イク)^2=\left(\frac{寅}{2}+未\right)^2-\left(\frac{寅}{2}-未\right)^2=\left(\frac{寅}{2}+未+\frac{寅}{2}-未\right)\times\left(\frac{寅}{2}+未-\frac{寅}{2}+未\right)$$

$$(エク)^2-(イク)^2=寅\times2\times未 \qquad \cdots(27)$$

（２４），（２７）から

$$寅\times2\times未=\left\{\frac{2\times東}{丁}\times(甲-丁)-寅\right\}\times(丑-卯)$$

$$未=\left\{\frac{2\times東}{丁}\times(甲-丁)-寅\right\}\times\frac{丑-卯}{2\times寅} \qquad ・・・(２８)$$

（１７），（２８）から

$$\left(\frac{寅^2}{4\times子}-\frac{甲}{2}-午\right)\times\left(-\frac{甲}{2}+子+午\right)=\left[\left\{\frac{2\times東}{丁}\times(甲-丁)-寅\right\}\times\frac{丑-卯}{2\times寅}\right]^2 \qquad ・・・(２９)$$

両辺に　$8\times子\times寅^2\times丁^2$　をかけて

$$\left\{寅^2-2\times子\times\left(甲+2\times午\right)\right\}\times\left\{2\times子-\left(甲-2\times午\right)\right\}\times寅^2\times丁^2$$

$$=\left\{2\times東\times(甲-丁)-寅\times丁\right\}^2\times(丑-卯)^2\times2\times子$$

$$\left\{2\times子\times寅^4-\left(甲-2\times午\right)\times寅^4-4\times子^2\times\left(甲+2\times午\right)\times寅^2\right.$$

$$\left.+2\times子\times\left(甲+2\times午\right)\times\left(甲-2\times午\right)\times寅^2\right\}\times丁^2$$

$$=\left\{2\times東\times(甲-丁)-寅\times丁\right\}^2\times(丑-卯)^2\times2\times子 \qquad ・・・(３０)$$

(１４)を代入するが、計算が煩雑なので、　$\left(甲+2\times午\right)\times寅$　と　$\left(甲-2\times午\right)\times寅$

　　$\left(甲+2\times午\right)\times\left(甲-2\times午\right)\times寅^2$　を先に計算する

$$\left(甲+2\times午\right)\times寅=\left[甲+2\times\left\{\frac{丁}{2}-\frac{\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)}{2\times寅}\right\}\right]\times寅$$

$$=\left\{甲+丁-\frac{\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)}{寅}\right\}\times寅=寅\times\left(甲+丁\right)-\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)$$

$$=寅\times\left(甲-丁\right)+2\times寅\times丁-\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)$$

$$=2\times寅\times丁-\left(丑-寅+卯\right)\times\left(甲-丁\right) \qquad ・・・(３１)$$

$$\left(甲-2\times午\right)\times寅=\left[甲-2\times\left\{\frac{丁}{2}-\frac{\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)}{2\times寅}\right\}\right]\times寅$$

$$=\left\{甲-丁+\frac{\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)}{寅}\right\}\times寅=寅\times\left(甲-丁\right)+\left(丑+卯\right)\times\left(甲-丁\right)$$

$$=\left(丑+寅+卯\right)\times\left(甲-丁\right) \qquad ・・・(３２)$$

（３１），（３２）から

$$\left(甲+2\times午\right)\times\left(甲-2\times午\right)\times寅^2$$

$$=\left\{2\times寅\times丁-\left(丑-寅+卯\right)\times\left(甲-丁\right)\right\}\times\left(丑+寅+卯\right)\times\left(甲-丁\right)$$

$$=2\times寅\times丁\times\left(丑+寅+卯\right)\times\left(甲-丁\right)-\left(丑-寅+卯\right)\times\left(丑+寅+卯\right)$$

$$\times\left(甲-丁\right)^2 \qquad ・・・(３３)$$

（３１），（３２），（３３）を（３０）に適用して

$$\Big[2\times子\times寅^{4}-(丑+寅+卯)\times(甲-丁)\times寅^{3}$$

$$-4\times子^{2}\times\{2\times寅\times丁-(丑-寅+卯)\times(甲-丁)\}\times寅$$

$$+2\times子$$

$$\times\Big\{2\times寅\times丁\times(丑+寅+卯)\times(甲-丁)-(丑-寅+卯)\times(丑+寅+卯)$$

$$\times(甲-丁)^{2}\Big\}\Big]\times丁^{2}=\{2\times東\times(甲-丁)-寅\times丁\}^{2}\times(丑-卯)^{2}\times2\times子$$

$$2\times子\times寅^{4}\times丁^{2}-寅^{3}\times丁^{2}\times(丑+寅+卯)\times(甲-丁)-8\times子^{2}\times寅^{2}\times丁^{3}$$

$$+4\times子^{2}\times寅\times丁^{2}\times(丑-寅+卯)\times(甲-丁)$$

$$+4\times子\times寅\times丁^{3}\times(丑+寅+卯)\times(甲-丁)-2\times子\times(丑-寅+卯)$$

$$\times(丑+寅+卯)\times丁^{2}\times(甲-丁)^{2}$$

$$=8\times子\times(丑-卯)^{2}\times東^{2}\times(甲-丁)^{2}-8\times子\times(丑-卯)^{2}\times寅\times丁\times東$$

$$\times(甲-丁)+2\times子\times(丑-卯)^{2}\times寅^{2}\times丁^{2}$$

$$8\times子\times(丑-卯)^{2}\times東^{2}\times(甲-丁)^{2}+2\times子\times(丑-寅+卯)\times(丑+寅+卯)\times丁^{2}$$

$$\times(甲-丁)^{2}-8\times子\times(丑-卯)^{2}\times寅\times丁\times東\times(甲-丁)+寅^{3}\times丁^{2}$$

$$\times(丑+寅+卯)\times(甲-丁)-4\times子^{2}\times寅\times丁^{2}\times(丑-寅+卯)\times(甲-丁)-4$$

$$\times子\times寅\times丁^{3}\times(丑+寅+卯)\times(甲-丁)+2\times子\times(丑-卯)^{2}\times寅^{2}\times丁^{2}$$

$$-2\times子\times寅^{4}\times丁^{2}+8\times子^{2}\times寅^{2}\times丁^{3}=0$$

$$\Big\{8\times子\times(丑-卯)^{2}\times東^{2}+2\times子\times(丑-寅+卯)\times(丑+寅+卯)\times丁^{2}\Big\}\times(甲-丁)^{2}$$

$$-\Big\{8\times子\times(丑-卯)^{2}\times丁\times東-寅^{2}\times丁^{2}\times(丑+寅+卯)+4\times子^{2}\times丁^{2}$$

$$\times(丑-寅+卯)+4\times子\times丁^{3}\times(丑+寅+卯)\Big\}\times寅\times(甲-丁)$$

$$+2\times子\times\Big\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\Big\}\times寅^{2}\times丁^{2}=0\qquad\cdots(34)$$

(３４)の　$(甲-丁)^2$　の係数のみを先に計算する。(１８)から　$2\times 東=丑-寅+卯$

(１１)から　$丁^2=\dfrac{-(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)}{丑+寅+卯}$　として

$$8\times 子\times(丑-卯)^2\times 東^2+2\times 子\times(丑-寅+卯)\times(丑+寅+卯)\times 丁^2$$

$$=2\times 子\times(丑-卯)^2\times(丑-寅+卯)^2+2\times 子\times(丑-寅+卯)\times(丑+寅+卯)$$

$$\times\frac{-(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)}{丑+寅+卯}$$

$$=2\times 子\times(丑-卯)^2\times(丑-寅+卯)^2-2\times 子\times(丑-寅+卯)^2$$

$$\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)$$

$$=2\times 子\times\left\{(丑-卯)^2-(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)\right\}\times(丑-寅+卯)^2$$

$$=2\times 子\times\left\{(丑-卯)^2-(丑-卯)^2+寅^2\right\}\times(丑-寅+卯)^2$$

$$=2\times 子\times 寅^2\times(丑-寅+卯)^2$$ ・・・（３５）

(３４)の　$(甲-丁)$　の係数のみを先に計算する。(１８)から　$2\times 東=丑-寅+卯$

(１１)から　$丁^3=\dfrac{-(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)}{丑+寅+卯}\times 丁$　として

$$-\left\{8\times 子\times(丑-卯)^2\times 丁\times 東-寅^2\times 丁^2\times(丑+寅+卯)+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)\right.$$

$$\left.+4\times 子\times 丁^3\times(丑+寅+卯)\right\}\times 寅$$

$$=-\left\{4\times 子\times(丑-卯)^2\times 丁\times(丑-寅+卯)-寅^2\times 丁^2\times(丑+寅+卯)\right.$$

$$+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)\qquad+4\times 子$$

$$\left.\times\frac{-(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)}{丑+寅+卯}\times 丁\times(丑+寅+卯)\right\}\times 寅$$

$$=-\left\{4\times 子\times(丑-寅+卯)\times(丑-卯)^2\times 丁\right.$$

$$-寅^2\times 丁^2\times(丑+寅+卯)+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)$$

$$\left.-4\times 子\times(丑-寅+卯)\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)\times 丁\right\}\times 寅$$

$$=-\Big[4\times 子\times(丑-寅+卯)\times(丑-卯)^2\times 丁$$

$$-寅^2\times 丁^2\times(丑+寅+卯)+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)$$

$$-4\times 子\times(丑-寅+卯)\times\left\{(丑-卯)^2-寅^2\right\}\times 丁\Big]\times 寅$$

$$=-\Big\{-寅^2\times 丁^2\times(丑+寅+卯)+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)$$

$$+4\times 子\times(丑-寅+卯)\times 寅^2\times 丁\Big\}\times 寅 \qquad \cdots(36)$$

(３６)で　$丁^2\times(丑+寅+卯)=-(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)$　として

$\{(甲-丁)$の係数$\}$

$$=-\Big\{寅^2\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅+卯)\times(丑-寅-卯)+4\times 子^2\times 丁^2\times(丑-寅+卯)$$

$$+4\times 子\times(丑-寅+卯)\times 寅^2\times 丁\Big\}\times 寅$$

$$=-\left\{寅^2\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)+4\times 子^2\times 丁^2+4\times 子\times 寅^2\times 丁\right\}$$

$$\times(丑-寅+卯)\times 寅 \qquad \cdots(37)$$

（３５），（３７）を（３４）に適用して、定数項を右辺に移項すると

$$2\times 子\times 寅^2\times(丑-寅+卯)^2\times(甲-丁)^2$$

$$-\left\{寅^2\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)+4\times 子^2\times 丁^2+4\times 子\times 寅^2\times 丁\right\}$$

$$\times(丑-寅+卯)\times 寅\times(甲-丁)$$

$$=-2\times 子\times\left\{(丑-卯)^2-寅^2+4\times 子\times 丁\right\}\times 寅^2\times 丁^2 \qquad \cdots(38)$$

(３８)の両辺を　$2\times 子\times 寅^2\times(丑-寅+卯)^2$　で割って

$$(甲-丁)^2-2\times\frac{\left\{寅^2\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)+4\times 子^2\times 丁^2+4\times 子\times 寅^2\times 丁\right\}}{4\times 子\times 寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$\times(甲-丁)\quad=-\frac{\left\{(丑-卯)^2-寅^2+4\times 子\times 丁\right\}}{(丑-寅+卯)^2}\times 丁^2$$

$$
\left[\text{甲}-\text{丁}-\frac{\left\{\text{寅}^{2}\times(\text{丑}+\text{寅}-\text{卯})\times(\text{丑}-\text{寅}-\text{卯})+4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+4\times\text{子}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}\right\}}{4\times\text{子}\times\text{寅}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})}\right]^{2}
$$

$$
=\left[\frac{\left\{\text{寅}^{2}\times(\text{丑}+\text{寅}-\text{卯})\times(\text{丑}-\text{寅}-\text{卯})+4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+4\times\text{子}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}\right\}}{4\times\text{子}\times\text{寅}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})}\right]^{2}
$$

$$
-\frac{\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}+4\times\text{子}\times\text{丁}\right\}}{(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}\times\text{丁}^{2}
$$

$$
\left[\text{甲}-\text{丁}-\frac{\left\{\text{寅}^{2}\times(\text{丑}+\text{寅}-\text{卯})\times(\text{丑}-\text{寅}-\text{卯})+4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+4\times\text{子}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}\right\}}{4\times\text{子}\times\text{寅}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})}\right]^{2}
$$

$$
=\frac{\left[\text{寅}^{2}\times\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}\right\}+4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+4\times\text{子}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}\right]^{2}}{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}
$$

$$
-\frac{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}^{2}\times\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}+4\times\text{子}\times\text{丁}\right\}}{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}
$$

$$
=\frac{\left[4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+\text{寅}^{2}\times\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}+4\times\text{子}\times\text{丁}\right\}\right]^{2}}{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}
$$

$$
-\frac{16\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}\times\text{寅}^{2}\times\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}+4\times\text{子}\times\text{丁}\right\}}{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}
$$

$$
\left[\text{甲}-\text{丁}-\frac{\left\{\text{寅}^{2}\times(\text{丑}+\text{寅}-\text{卯})\times(\text{丑}-\text{寅}-\text{卯})+4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}+4\times\text{子}\times\text{寅}^{2}\times\text{丁}\right\}}{4\times\text{子}\times\text{寅}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})}\right]^{2}
$$

$$
=\frac{\left[4\times\text{子}^{2}\times\text{丁}^{2}-\text{寅}^{2}\times\left\{(\text{丑}-\text{卯})^{2}-\text{寅}^{2}+4\times\text{子}\times\text{丁}\right\}\right]^{2}}{16\times\text{子}^{2}\times\text{寅}^{2}\times(\text{丑}-\text{寅}+\text{卯})^{2}}\qquad\cdots(39)
$$

（３９）の両辺の平方根をとって

$$甲-丁-\frac{寅^{2}\times(丑+寅-卯)\times(丑-寅-卯)+4\times子^{2}\times丁^{2}+4\times子\times寅^{2}\times丁}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$=\pm\frac{4\times子^{2}\times丁^{2}-寅^{2}\times\left\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\right\}}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$甲-丁-\frac{4\times子^{2}\times丁^{2}+寅^{2}\times\left\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\right\}}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$=\pm\frac{4\times子^{2}\times丁^{2}-寅^{2}\times\left\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\right\}}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$甲-丁=\pm\frac{4\times子^{2}\times丁^{2}-寅^{2}\times\left\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\right\}}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

$$+\frac{4\times子^{2}\times丁^{2}+寅^{2}\times\left\{(丑-卯)^{2}-寅^{2}+4\times子\times丁\right\}}{4\times子\times寅\times(丑-寅+卯)}$$

図５から　$甲-丁>0$　なので　複号のプラス側を採って

$$甲-丁=\frac{2\times子\times丁^{2}}{寅\times(丑-寅+卯)} \quad \cdot\cdot\cdot(40)$$

$丑-寅+卯=2\times東$　なので　（４１）のようにも書ける

$$甲-丁=\frac{子\times丁^{2}}{寅\times東} \quad \cdot\cdot\cdot(41)$$

次に乙円について考える。
図６のように作図する。

三角形ウイエの内接円を、戊円とする。
戊円の直径を　戊とする。
戊円の中心を　ナとする。

ナから、線分オキの延長へ下した
垂線の足を　ニとする。
ケから、線分オキの延長へ下した
垂線の足を　ヌとする。

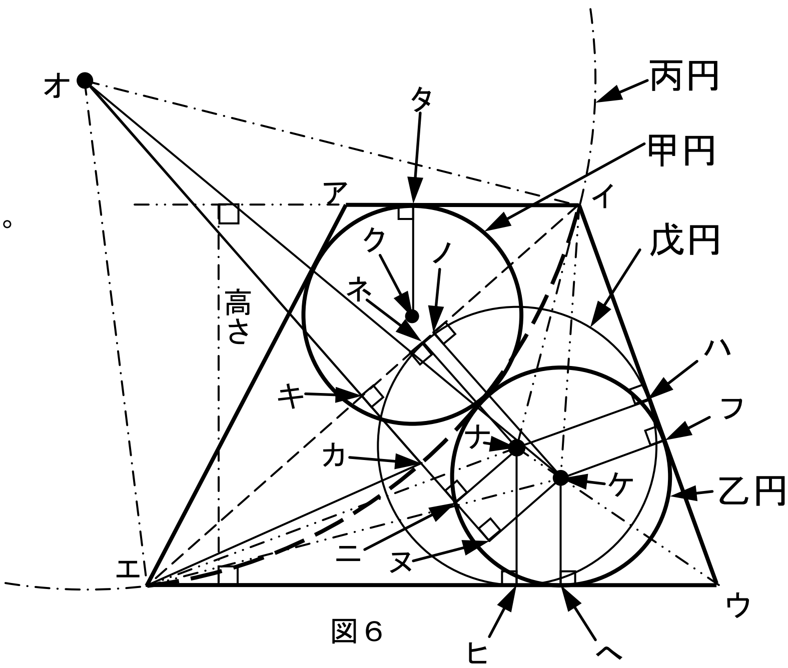


図６

ナから、線分イエへ下した垂線の足を　ネとする。
ケから、線分イエへ下した垂線の足を　ノとする。
ナから、辺イウへ下した垂線の足を　ハ，辺ウエへ下した垂線の足を　ヒとする。
ケから、辺イウへ下した垂線の足を　フ，辺ウエへ下した垂線の足を　へとする。

線分ケノの長さを　申，線分ケヌの長さを　酉，線分ウヒの長さを　西とする。

三角形ウイエの面積を、３つの方法で求め、２つの式を得る。１つ目の方法は

$$(\text{三角形ウイエの面積}) = \frac{1}{2}\times(\text{ウイ})\times(\text{戊円の半径}) + \frac{1}{2}\times(\text{イエ})\times(\text{戊円の半径}) + \frac{1}{2}\times(\text{エウ})\times(\text{戊円の半径})$$

$$(\text{三角形ウイエの面積}) = (\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4} \qquad \cdots(42)$$

２つ目の方法は

$$(\text{三角形ウイエの面積}) = \frac{1}{2}\times\text{巳}\times\text{高} \qquad \cdots(43)$$

３つ目の方法は、（９）と同様に三角形ウイエの三辺で次のように表せるので

$$(\text{三角形ウイエの面積}) = \frac{1}{4}\times\sqrt{(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times(\text{辰}+\text{寅}-\text{巳})\times(\text{辰}-\text{寅}+\text{巳})\times(-\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})} \qquad \cdots(44)$$

（４２），（４３）から

$$(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4} = \frac{1}{2}\times\text{巳}\times\text{高}$$

$$\text{戊} = \frac{2\times\text{巳}\times\text{高}}{\text{辰}+\text{寅}+\text{巳}} \qquad \cdots(45)$$

（４２），（４４）から

$$(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4} = \frac{1}{4}\times\sqrt{(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times(\text{辰}+\text{寅}-\text{巳})\times(\text{辰}-\text{寅}+\text{巳})\times(-\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})}$$

$$\text{戊} = \sqrt{\frac{(\text{辰}+\text{寅}-\text{巳})\times(\text{辰}-\text{寅}+\text{巳})\times(-\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})}{\text{辰}+\text{寅}+\text{巳}}} \qquad \cdots(46)$$

次に、三角形ケイエの面積を考える。三角形ケイエの面積は、三角形ウイエの面積から、三角形ウイケの面積と三角形ウケエの面積を引いたものなので

$$(\text{三角形ケイエの面積}) = (\text{三角形ウイエの面積}) - (\text{三角形ウイケの面積}) - (\text{三角形ウケエの面積})$$

$$(\text{三角形ケイエの面積}) = (\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4} - \frac{1}{2}\times\text{辰}\times\frac{\text{乙}}{2} - \frac{1}{2}\times\text{巳}\times\frac{\text{乙}}{2}$$

$$(\text{三角形ケイエの面積}) = (\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4} - (\text{辰}+\text{巳})\times\frac{\text{乙}}{4} \qquad \cdots(47)$$

また

$(\text{三角形ケイエの面積})=\dfrac{1}{2}\times\text{寅}\times\text{申}$ ・・・（４８）

（４７），（４８）より

$$\frac{1}{2}\times\text{寅}\times\text{申}=(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\frac{\text{戊}}{4}-(\text{辰}+\text{巳})\times\frac{\text{乙}}{4}$$

$$2\times\text{寅}\times\text{申}=(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\text{戊}-(\text{辰}+\text{巳})\times\text{乙}$$

$$\text{申}=\frac{(\text{辰}+\text{寅}+\text{巳})\times\text{戊}-(\text{辰}+\text{巳})\times\text{乙}}{2\times\text{寅}}=\frac{\text{寅}\times\text{戊}+(\text{辰}+\text{巳})\times\text{戊}-(\text{辰}+\text{巳})\times\text{乙}}{2\times\text{寅}}$$

$$\text{申}=\frac{\text{寅}\times\text{戊}-(\text{辰}+\text{巳})\times(\text{乙}-\text{戊})}{2\times\text{寅}}\qquad\cdots(49)$$

次に、直角三角形オヌケで、三平方の定理から

$$(\text{ケヌ})^2=(\text{オケ})^2-(\text{オヌ})^2$$

ここで、$(\text{ケヌ})=\text{酉}$，　$(\text{オケ})=\dfrac{\text{丙}}{2}+\dfrac{\text{乙}}{2}$　また、$(\text{ヌキ})=(\text{ケノ})$なので、

$$(\text{オヌ})=(\text{オカ})-(\text{カキ})+(\text{ヌキ})=(\text{オカ})-(\text{カキ})+(\text{ケノ})=\frac{\text{丙}}{2}-\text{子}+\text{申}$$

$$\text{酉}^2=\left(\frac{\text{丙}}{2}+\frac{\text{乙}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{丙}}{2}-\text{子}+\text{申}\right)^2\qquad\cdots(50)$$

$$\text{酉}^2=\left(\frac{\text{丙}}{2}+\frac{\text{乙}}{2}+\frac{\text{丙}}{2}-\text{子}+\text{申}\right)\times\left(\frac{\text{丙}}{2}+\frac{\text{乙}}{2}-\frac{\text{丙}}{2}+\text{子}-\text{申}\right)=\left(\text{丙}+\frac{\text{乙}}{2}-\text{子}+\text{申}\right)\times\left(\frac{\text{乙}}{2}+\text{子}-\text{申}\right)\qquad\cdots(51)$$

（５１）に（２）を代入して

$$\text{酉}^2=\left(\frac{\text{寅}^2}{4\times\text{子}}+\frac{\text{乙}}{2}+\text{申}\right)\times\left(\frac{\text{乙}}{2}+\text{子}-\text{申}\right)\qquad\cdots(52)$$

別の方法で　酉　を表すことを考える。

三角形ウイエの周の長さを２つの方法で表して

$(\text{三角形ウイエの周の長さ})=\text{辰}+\text{寅}+\text{巳}$ ・・・（５３）

また、$(\text{ウヒ})=(\text{ウハ})$，$(\text{イハ})=(\text{イネ})$，$(\text{エネ})=(\text{エヒ})$　から

$$\begin{aligned}(\text{三角形ウイエの周の長さ})&=(\text{ウハ})+(\text{イハ})+(\text{イネ})+(\text{エネ})+(\text{エヒ})+(\text{ウヒ})\\&=2\times(\text{ウヒ})+2\times(\text{イネ})+2\times(\text{エネ})=2\times(\text{ウヒ})+2\times(\text{イエ})\\&=2\times\text{酉}+2\times\text{寅}\end{aligned}$$

$$2\times\text{酉}+2\times\text{寅}=\text{辰}+\text{寅}+\text{巳}$$

$$2\times\text{酉}=\text{辰}-\text{寅}+\text{巳}$$

$$西=\frac{辰-寅+巳}{2}\qquad \cdots(５４)$$

図６で、直角三角形ウヒナと直角三角形ウヘケの相似から

$$(ウヒ):(ヒナ)=(ウヘ):(ヘケ)$$

$$(ヒナ)\times(ウヘ)=(ウヒ)\times(ヘケ)$$

$$(ウヘ)=\frac{(ウヒ)\times(ヘケ)}{(ヒナ)}=\frac{西\times\frac{乙}{2}}{\frac{戊}{2}}=\frac{西\times乙}{戊}\qquad \cdots(５５)$$

直角三角形エヘケで、三平方の定理から

$$(エケ)^2=(エヘ)^2+(ヘケ)^2=\{(エウ)-(ウヘ)\}^2+(ヘケ)^2$$

ここで、$(エウ)=巳$，(５５)より　$(ウヘ)=\frac{西\times乙}{戊}$，$(タク)=\frac{乙}{2}$　なので

$$(エケ)^2=\left(巳-\frac{西\times乙}{戊}\right)^2+\left(\frac{乙}{2}\right)^2\qquad \cdots(５６)$$

$$(ウフ)=(ウヘ)=\frac{西\times乙}{戊}\qquad \cdots(５７)$$

直角三角形イフケで、三平方の定理から

$$(イケ)^2=(イフ)^2+(フケ)^2=\{(イウ)-(ウフ)\}^2+(フケ)^2$$

ここで、$(イウ)=辰$，(５７)より　$(ウフ)=\frac{西\times乙}{戊}$，$(フケ)=\frac{乙}{2}$　なので

$$(イケ)^2=\left(辰-\frac{西\times乙}{戊}\right)^2+\left(\frac{乙}{2}\right)^2\qquad \cdots(５８)$$

（５８）－（５６）から

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left(辰-\frac{西\times乙}{戊}\right)^2-\left(巳-\frac{西\times乙}{戊}\right)^2$$

$$=\left(辰-\frac{西\times乙}{戊}+巳-\frac{西\times乙}{戊}\right)\times\left(辰-\frac{西\times乙}{戊}-巳+\frac{西\times乙}{戊}\right)$$

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left(辰+巳-2\times\frac{西\times乙}{戊}\right)\times(辰-巳)\qquad \cdots(５９)$$

（５９）に（５３）を代入して（　辰と巳　の式の中なので、西　を解いてみる。）

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left\{辰+巳-\frac{(辰-寅+巳)\times乙}{戊}\right\}\times(辰-巳)$$

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left\{\frac{(辰-寅+巳)\times 乙}{戊}-(辰+巳)\right\}\times(巳-辰)$$
$$=\left\{\frac{(辰-寅+巳)\times 乙-(辰+巳)\times 戊}{戊}\right\}\times(巳-辰)$$
$$=\frac{(辰-寅+巳)\times 乙-(辰-寅+巳)\times 戊-寅\times 戊}{戊}\times(巳-辰)$$
$$=\frac{(辰-寅+巳)\times(乙-戊)-寅\times 戊}{戊}\times(巳-辰)$$

(５４)から　$辰-寅+巳=２\times 酉$　なので　（もう一度くくって）

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\frac{２\times 酉\times(乙-戊)-寅\times 戊}{戊}\times(巳-辰)$$

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left\{\frac{２\times 酉}{戊}\times(乙-戊)-寅\right\}\times(巳-辰) \qquad ・・・(６０)$$

もうひとつの方法で、　$(イケ)^2-(エケ)^2$　を求める

直角三角形イノケで三平方の定理から

$$(イケ)^2=(イノ)^2+(ノケ)^2$$

ここで、$(イノ)=(イキ)-(キノ)=\frac{(イエ)}{2}-(ケヌ)=\frac{寅}{2}-酉$　，$(ノケ)=申$　なので

$$(イケ)^2=\left(\frac{寅}{2}-酉\right)^2+申^2 \qquad ・・・（６１）$$

直角三角形エノケで三平方の定理から

$$(エケ)^2=(エノ)^2+(ノケ)^2$$

ここで、$(エノ)=(エキ)+(キノ)=\frac{(イエ)}{2}+(ケヌ)=\frac{寅}{2}+酉$　，$(ノケ)=申$　なので

$$(エケ)^2=\left(\frac{寅}{2}+酉\right)^2+申^2 \qquad ・・・（６２）$$

（６１）ー（６２）から

$$(イケ)^2-(エケ)^2=\left(\frac{寅}{2}-酉\right)^2-\left(\frac{寅}{2}+酉\right)^2=\left(\frac{寅}{2}-酉+\frac{寅}{2}+酉\right)\times\left(\frac{寅}{2}-酉-\frac{寅}{2}-酉\right)$$

$$(イケ)^2-(エケ)^2=-寅\times ２\times 酉 \qquad ・・・（６３）$$

（６０），（６３）から

$$-寅\times ２\times 酉=\left\{\frac{２\times 酉}{戊}\times(乙-戊)-寅\right\}\times(巳-辰)$$

$$酉=\left\{\frac{２\times西}{戊}\times\left(乙-戊\right)-寅\right\}\times\frac{辰-巳}{２\times寅} \qquad ・・・（６４）$$

（５２），（６４）から

$$\left(\frac{寅^{2}}{４\times子}+\frac{乙}{２}+申\right)\times\left(\frac{乙}{２}+子-申\right)=\left[\left\{\frac{２\times西}{戊}\times\left(乙-戊\right)-寅\right\}\times\frac{辰-巳}{２\times寅}\right]^{2} \qquad ・・・（６５）$$

両辺に　$８\times子\times寅^{2}\times戊^{2}$　をかけて

$$\left\{寅^{2}+２\times子\times\left(乙+２\times申\right)\right\}\times\left\{２\times子+\left(乙-２\times申\right)\right\}\times寅^{2}\times戊^{2}$$

$$=\left\{２\times西\times\left(乙-戊\right)-寅\times戊\right\}^{2}\times\left(辰-巳\right)^{2}\times２\times子$$

$$\left\{２\times子\times寅^{4}+\left(乙-２\times申\right)\times寅^{4}+４\times子^{2}\times\left(乙+２\times申\right)\times寅^{2}\right.$$

$$\left.+２\times子\times\left(乙+２\times申\right)\times\left(乙-２\times申\right)\times寅^{2}\right\}\times戊^{2}$$

$$=\left\{２\times西\times\left(乙-戊\right)-寅\times戊\right\}^{2}\times\left(辰-巳\right)^{2}\times２\times子 \qquad ・・・（６６）$$

(４９)を代入するが、計算が煩雑なので、　$(乙+２\times申)\times寅$　と　$(乙-２\times申)\times寅$

　および　$(乙+２\times申)\times(乙-２\times申)\times寅^{2}$　を先に計算する

$$\left(乙+２\times申\right)\times寅=\left\{乙+２\times\frac{寅\times戊-\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)}{２\times寅}\right\}\times寅$$

$$=\left\{乙+戊-\frac{\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)}{寅}\right\}\times寅=寅\times\left(乙+戊\right)-\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)$$

$$=寅\times\left(乙-戊\right)+２\times寅\times戊-\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)$$

$$=２\times寅\times戊-\left(辰-寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right) \qquad ・・・（６７）$$

$$\left(乙-２\times申\right)\times寅=\left\{乙-２\times\frac{寅\times戊-\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)}{２\times寅}\right\}\times寅$$

$$=\left\{乙-戊+\frac{\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)}{寅}\right\}\times寅=寅\times\left(乙-戊\right)+\left(辰+巳\right)\times\left(乙-戊\right)$$

$$=\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right) \qquad ・・・（６８）$$

（６７），（６８）から

$$
\begin{aligned}
&\left(乙+2\times申\right)\times\left(乙-2\times申\right)\times寅^{2}\\
&\qquad=\left\{2\times寅\times戊-\left(辰-寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)\right\}\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)\\
&\qquad=2\times寅\times戊\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)-\left(辰-寅+巳\right)\times\left(辰+寅+巳\right)\\
&\qquad\times\left(乙-戊\right)^{2} \qquad\cdots(69)
\end{aligned}
$$

（６７），（６８），（６９） を （６６） に適用して

$$
\begin{aligned}
&\Big[2\times子\times寅^{4}+\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)\times寅^{3}\\
&\qquad+4\times子^{2}\times\left\{2\times寅\times戊-\left(辰-寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)\right\}\times寅\\
&\qquad+2\times子\\
&\qquad\times\Big\{2\times寅\times戊\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)-\left(辰-寅+巳\right)\times\left(辰+寅+巳\right)\\
&\qquad\times\left(乙-戊\right)^{2}\Big\}\Big]\times戊^{2}=\left\{2\times西\times\left(乙-戊\right)-寅\times戊\right\}^{2}\times\left(辰-巳\right)^{2}\times2\times子
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\times子\times寅^{4}\times戊^{2}+寅^{3}\times戊^{2}\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)+8\times子^{2}\times寅^{2}\times戊^{3}-4\times子^{2}\\
&\qquad\times寅\times戊^{2}\times\left(辰-寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)+4\times子\times寅\times戊^{3}\times\left(辰+寅+巳\right)\\
&\qquad\times\left(乙-戊\right)-2\times子\times\left(辰-寅+巳\right)\times\left(辰+寅+巳\right)\times戊^{2}\times\left(乙-戊\right)^{2}\\
&\qquad=8\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times西^{2}\times\left(乙-戊\right)^{2}-8\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times寅\times戊\times西\\
&\qquad\times\left(乙-戊\right)+2\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times寅^{2}\times戊^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&8\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times西^{2}\times\left(乙-戊\right)^{2}+2\times子\times\left(辰-寅+巳\right)\times\left(辰+寅+巳\right)\times戊^{2}\\
&\qquad\times\left(乙-戊\right)^{2}-8\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times寅\times戊\times西\times\left(乙-戊\right)-寅^{3}\times戊^{2}\\
&\qquad\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)+4\times子^{2}\times寅\times戊^{2}\times\left(辰-寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)-4\\
&\qquad\times子\times寅\times戊^{3}\times\left(辰+寅+巳\right)\times\left(乙-戊\right)+2\times子\times\left(辰-巳\right)^{2}\times寅^{2}\times戊^{2}-2\\
&\qquad\times子\times寅^{4}\times戊^{2}-8\times子^{2}\times寅^{2}\times戊^{3}=0
\end{aligned}
$$

$$\left\{8\times子\times(辰-巳)^2\times酉^2+2\times子\times(辰-寅+巳)\times(辰+寅+巳)\times戊^2\right\}\times(乙-戊)^2$$

$$-\left\{8\times子\times(辰-巳)^2\times戊\times酉+寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2\right.$$

$$\left.\times(辰-寅+巳)+4\times子\times戊^3\times(辰+寅+巳)\right\}\times寅\times(乙-戊)$$

$$+2\times子\times\left\{(辰-巳)^2-寅^2-4\times子\times戊\right\}\times寅^2\times戊^2=0 \qquad \cdot\cdot\cdot(70)$$

(７０)の　$(甲-丁)^2$　の係数のみを先に計算する。(５３)から　$2\times酉=辰-寅+巳$　,

(４４)から　$戊^2=\dfrac{-(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)}{辰+寅+巳}$　として

$$8\times子\times(辰-巳)^2\times酉^2+2\times子\times(辰-寅+巳)\times(辰+寅+巳)\times戊^2$$

$$=2\times子\times(辰-巳)^2\times(辰-寅+巳)^2+2\times子\times(辰-寅+巳)\times(辰+寅+巳)$$

$$\times\frac{-(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)}{辰+寅+巳}$$

$$=2\times子\times(辰-巳)^2\times(辰-寅+巳)^2+2\times子\times(辰-寅+巳)\times(辰+寅+巳)$$

$$\times\frac{-(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)}{辰+寅+巳}$$

$$=2\times子\times(辰-巳)^2\times(辰-寅+巳)^2-2\times子\times\left\{(辰-巳)^2-寅^2\right\}$$

$$\times(辰-寅+巳)^2=2\times子\times寅^2\times(辰-寅+巳)^2 \qquad \cdot\cdot\cdot(71)$$

(７０)の　$(甲-丁)$　の係数のみを先に計算する。(５３)から　$2\times酉=辰-寅+巳$　,

(４４)から　$戊^3=\dfrac{-(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)}{辰+寅+巳}\times戊$　として

$$-\left\{8\times子\times(辰-巳)^2\times戊\times酉+寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2\times(辰-寅+巳)\right.$$

$$\left.+4\times子\times戊^3\times(辰+寅+巳)\right\}\times寅$$

$$=-\left\{4\times子\times(辰-巳)^2\times戊\times(辰-寅+巳)+寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2\right.$$

$$\left.\times(辰-寅+巳)-4\times子\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)\times戊\right\}$$

$$\times寅$$

$$=-\Big\{4\times子\times(辰-巳)^2\times戊\times(辰-寅+巳)+寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2$$

$$\times(辰-寅+巳)-4\times子\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)\times戊\Big\}$$

$$\times寅$$

$$=-\Big[4\times子\times(辰-巳)^2\times戊\times(辰-寅+巳)+寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2$$

$$\times(辰-寅+巳)-4\times子\times\Big\{(辰-巳)^2-寅^2\Big\}\times(辰-寅+巳)\times戊\Big]\times寅$$

$$=-\Big\{寅^2\times戊^2\times(辰+寅+巳)-4\times子^2\times戊^2\times(辰-寅+巳)$$

$$+4\times子\times寅^2\times(辰-寅+巳)\times戊\Big\}\times寅 \qquad ・・・（７２）$$

(72)で　$戊^2\times(辰+寅+巳)=-(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)$　として

$\{(乙-戊)の係数\}$

$$=-\Big\{-寅^2\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅+巳)\times(辰-寅-巳)-4\times子^2\times戊^2\times(辰-寅+巳)$$

$$+4\times子\times寅^2\times(辰-寅+巳)\times戊\Big\}\times寅$$

$$=-\Big\{-寅^2\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅-巳)-4\times子^2\times戊^2+4\times子\times寅^2\times戊\Big\}$$

$$\times(辰-寅+巳)\times寅 \qquad ・・・（７３）$$

（７１），（７３）を（７０）に適用して、定数項を右辺に移項すると

$$2\times子\times寅^2\times(辰-寅+巳)^2\times(乙-戊)^2$$

$$-\Big\{-寅^2\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅-巳)-4\times子^2\times戊^2+4\times子\times寅^2\times戊\Big\}$$

$$\times(辰-寅+巳)\times寅\times(乙-戊)$$

$$=-2\times子\times\Big\{(辰-巳)^2-寅^2-4\times子\times戊\Big\}\times寅^2\times戊^2 \qquad ・・・（７４）$$

(74)の両辺を　$2\times子\times寅^2\times(辰-寅+巳)^2$　で割って

$$(乙-戊)^2+2\times\frac{4\times子^2\times戊^2+寅^2\times(辰+寅-巳)\times(辰-寅-巳)-4\times子\times寅^2\times戊}{4\times子\times寅\times(辰-寅+巳)}$$

$$\times(乙-戊)\quad=-\frac{\Big\{(辰-巳)^2-寅^2-4\times子\times戊\Big\}}{(辰-寅+巳)^2}\times戊^2$$

$$\left[乙-戊+\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}\right\}-4\times子\times寅^{2}\times戊}{4\times子\times寅\times\left(辰-寅+巳\right)}\right]^{2}$$

$$=\left[\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}\right\}-4\times子\times寅^{2}\times戊}{4\times子\times寅\times\left(辰-寅+巳\right)}\right]^{2}$$

$$-\frac{\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{\left(辰-寅+巳\right)^{2}}\times戊^{2}$$

$$\left[乙-戊+\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times\left(辰-寅+巳\right)}\right]^{2}$$

$$=\frac{\left[4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}\right]^{2}}{16\times子^{2}\times寅^{2}\times\left(辰-寅+巳\right)^{2}}$$

$$-\frac{16\times子^{2}\times戊^{2}\times寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{16\times子^{2}\times寅^{2}\times\left(辰-寅+巳\right)^{2}}$$

$$\left[乙-戊+\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times\left(辰-寅+巳\right)}\right]^{2}$$

$$=\frac{\left[4\times子^{2}\times戊^{2}-寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}\right]^{2}}{16\times子^{2}\times寅^{2}\times\left(辰-寅+巳\right)^{2}}\qquad\cdots（７５）$$

（７５）の両辺の平方根をとって

$$乙-戊+\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}+寅^{2}\times\left\{(辰-巳)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times(辰-寅+巳)}$$

$$=\pm\frac{4\times子^{2}\times戊^{2}-寅^{2}\times\left\{\left(辰-巳\right)^{2}-寅^{2}-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times\left(辰-寅+巳\right)}$$

$$乙-戊=\pm\frac{4\times子^2\times戊^2-寅^2\times\left\{(辰-巳)^2-寅^2-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times(辰-寅+巳)}$$

$$-\frac{4\times子^2\times戊^2+寅^2\times\left\{(辰-巳)^2-寅^2-4\times子\times戊\right\}}{4\times子\times寅\times(辰-寅+巳)}$$

図６から、　乙－戊＜０　なので　複号のマイナス側を採って

$$乙-戊=-\frac{2\times子\times戊^2}{寅\times(辰-寅+巳)} \qquad ・・・（７６）$$

辰－寅＋巳＝２×西　なので　（７７）のようにも書ける

$$乙-戊=-\frac{子\times戊^2}{寅\times西} \qquad ・・・（７７）$$

いままで、甲円の直径と乙円の直径が等しいという条件を考えてこなかったが、ここからは
この条件を使う。甲＝乙＝等　とし　以降は　等　を使う。
また、台形アイウエを等脚台形として　卯＝辰＝脚　とし　以降は　脚　を使う。
（４１）を　甲＝等　とすると

$$等-丁=\frac{子\times丁^2}{寅\times東} \qquad ・・・（７８）$$

ここで、台形アイウエを等脚台形とした場合の
東　と　西　の関係を、図７で見直しておく。

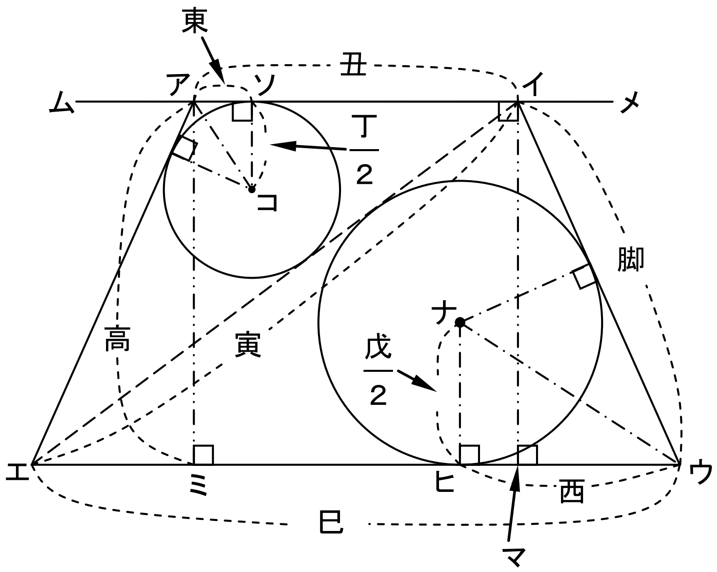


図７

角エウイと角メイウは、平行線の錯角なので
大きさが等しい。
角メイウは角ムアエは、台形アイウエが等脚
台形なので大きさが等しい。
したがって、角エウイ＝角ムアエ
ここで、角ムアエ＋角イアエ＝２×直角

角エウイ＝２×角ヒウナ
角イアエ＝２×角ソアコ
ゆえに、角ヒウナ＋角ソアコ＝直角
したがって、角ヒウナ＝角ソコア
直角以外の対応する一組の角の大きさが等しいので、直角三角形ウヒナと直角三角形コソアは相似。
(ウヒ) : (ヒナ) = (コソ) : (ソア)
(ウヒ) × (ソア) = (ヒナ) × (コソ)

$$西 \times 東 = \frac{戊}{2} \times \frac{丁}{2} = \frac{戊 \times 丁}{4} \qquad \cdots (79)$$

（７８）から

$$\frac{子}{寅} = (等 - 丁) \times \frac{東}{丁^2} \qquad \cdots (80)$$

（７７）から

$$\frac{子}{寅} = -(等 - 戊) \times \frac{西}{戊^2} \qquad \cdots (81)$$

（８０），（８１）から

$$\frac{(等 - 丁) \times 東}{丁^2} = -\frac{(等 - 戊) \times 西}{戊^2}$$

$$(等 - 丁) \times 東 \times 戊^2 = -(等 - 戊) \times 西 \times 丁^2$$

$$等 \times 東 \times 戊^2 - 丁 \times 東 \times 戊^2 = -等 \times 西 \times 丁^2 + 戊 \times 西 \times 丁^2$$

$$等 \times \left(東 \times 戊^2 + 西 \times 丁^2\right) = 丁 \times 東 \times 戊^2 + 戊 \times 西 \times 丁^2$$

$$等 = \frac{丁 \times 戊 \times (東 \times 戊 + 西 \times 丁)}{東 \times 戊^2 + 西 \times 丁^2} \qquad \cdots (82)$$

これ以上は難しいので、丁，戊，東，西　を求めて　（８２）へ入れて　等　を求める事にする。

$$丁 = \frac{2 \times 丑 \times 高}{丑 + 寅 + 脚} \qquad \cdots (83)$$

$$戊 = \frac{2 \times 巳 \times 高}{脚 + 寅 + 巳} \qquad \cdots (84)$$

$$東 = \frac{丑 - 寅 + 脚}{2} \qquad \cdots (85)$$

$$西 = \frac{脚 - 寅 + 巳}{2} \qquad \cdots (86)$$

寅，脚　を先に求める。
直角三角形イマエで、三平方の定理から

$$(イエ)^2 = (エマ)^2 + (マイ)^2 = \{(エウ) - (マウ)\}^2 + (マイ)^2$$

ここで　$(イエ)=寅,\ (エウ)=巳,\ (マウ)=\dfrac{巳-丑}{2},\ (マイ)=高$　なので

$$寅^2=\left(巳-\frac{巳-丑}{2}\right)^2+高^2=\left(\frac{2\times巳-巳+丑}{2}\right)^2+高^2=\left(\frac{巳+丑}{2}\right)^2+高^2$$

両辺の平方根をとって、寅　は正数なので

$$寅=\sqrt{\left(\frac{巳+丑}{2}\right)^2+高^2}$$　・・・（８７）

直角三角形イマウで、三平方の定理から

$$(イウ)^2=(マウ)^2+(マイ)^2$$

ここで　$(イウ)=脚,\ (マウ)=\dfrac{巳-丑}{2},\ (マイ)=高$　なので

$$脚^2=\left(\frac{巳-丑}{2}\right)^2+高^2$$

両辺の平方根をとって、脚　は正数なので

$$脚=\sqrt{\left(\frac{巳-丑}{2}\right)^2+高^2}$$　・・・（８８）

問題文から、丑＝１５，巳＝２０，高＝６　を入れて（８７），（８８）より

$$寅=\sqrt{\left(\frac{20+15}{2}\right)^2+6^2}=\sqrt{\frac{1225+144}{4}}=\frac{\sqrt{1369}}{2}=\frac{37}{2}=18.5$$

・・・（８９）

$$脚=\sqrt{\left(\frac{20-15}{2}\right)^2+6^2}=\sqrt{\frac{25+144}{4}}=\frac{\sqrt{169}}{2}=\frac{13}{2}=6.5$$　・・・（９０）

（８３），（８４），（８５），（８６）に　（８９），（９０），丑＝１５，巳＝２０，高＝６　を入れて

$$丁=\frac{2\times15\times6}{15+18.5+6.5}=\frac{180}{40}=\frac{9}{2}$$　・・・（９１）

$$戊=\frac{2\times20\times6}{6.5+18.5+20}=\frac{240}{45}=\frac{48}{9}=\frac{16}{3}$$　・・・（９２）

$$東=\frac{15-18.5+6.5}{2}=\frac{3}{2}$$　・・・（９３）

$$西=\frac{6.5-18.5+20}{2}=\frac{8}{2}=4$$　・・・（９４）

（９１），（９２），（９３），（９４）を　（８２）　に入れて

$$
等=\frac{\frac{9}{2}\times\frac{16}{3}\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{16}{3}+4\times\frac{9}{2}\right)}{\frac{3}{2}\times\frac{(16)^2}{3^2}+4\times\frac{9^2}{2^2}}=\frac{3\times8\times(8+2\times9)}{\frac{8\times16}{3}+9^2}=\frac{3\times3\times8\times(8+2\times9)}{8\times16+9^2\times3}
$$

$$
=\frac{9\times8\times(8+18)}{8\times16+81\times3}=\frac{72\times26}{128+243}=\frac{1872}{371}=5\frac{17}{371}
$$

答え　　　等円の直径は　$5\frac{17}{371}$　寸

〔考察〕

当初、問題文の「悌」を一般の台形とするか等脚台形とするか迷ったが、最終的に等脚台形として解答を導きました。一般の台形ではこの答えには到達できないように思えます。

解答は３つの部分に分かれています。
１つ目は、安島の定理１を導く部分，２つ目は、安島の定理２を導く部分で、共に円と三角形の関係なので、一般の台形でも等脚台形でも関係がありません。
３つ目の部分は、それまでに求めた２つの式から等円を求める部分ですが、等脚台形としないと答えがだせませんでした。

しばらくしたら、３つ目の部分で等脚台形としなくても答えが出せるか再検討しようと思います。
また、等脚台形でないと答えが出ないならば、現代語に訳した問題文に明確に「等脚台形」と書くように修正します。

平成３０年（２０１８年）２月２４日