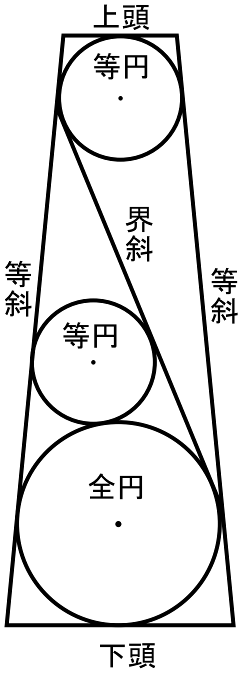
群馬の算額　２９－５　山名八幡宮　　文化１１年



今有如図悌内隔斜
容等円二個全円
只云等円径若干全円径若干
問界斜

〔問題の意味〕

図のように、等脚台形内に等円２個と全円を入れる。
等円の直径の長さと全円の直径の長さが与えられるとき、図で示す
界斜の長さをもとめよ。
（界斜の長さは、左の等斜との交点から右の等斜との交点までの長さ。
界斜は、２つの等円と全円に接している。）

〔解法例〕

図２のように作図する。
等脚台形を　タチツテとする。
上の等円の中心を　ア，下の等円の中心を　イとする。
全円の中心を　ウとする。
線分タテと界斜の交点を　キ，
線分チツと界斜の交点を　スとする。
（界斜の長さは、線分キスの長さを指す。）
アから線分チツへ下した垂線の足を　エ，
アから線分タテへ下した垂線の足を　オ，
アから線分キスへ下した垂線の足を　カとする。
イから線分キスへ下した垂線の足を　ク，
イから線分タテへ下した垂線の足を　ケとする。
ウから線分チツへ下した垂線の足を　コ，
ウから線分タテへ下した垂線の足を　サとする。

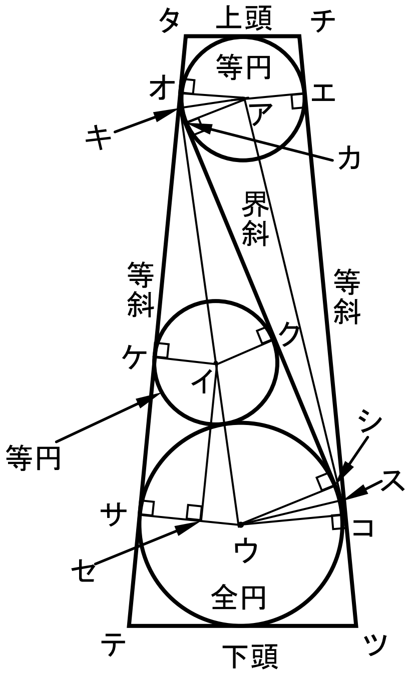


図２

アから線分キスへ下した垂線の足を　シとする。
イから線分ウサへ下した垂線の足を　セとする。
等円の直径の長さを　等，全円の直径の長さを　全とする。

直角三角形イセウで　三平方の定理から

$$(\text{イセ})^2=(\text{イウ})^2-(\text{セウ})^2$$

ここで、$(\text{イウ})=\dfrac{\text{全}}{2}+\dfrac{\text{等}}{2}$，$(\text{セウ})=\dfrac{\text{全}}{2}-\dfrac{\text{等}}{2}$　なので

$$(\text{イセ})^2=\left(\frac{\text{全}}{2}+\frac{\text{等}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{全}}{2}-\frac{\text{等}}{2}\right)^2=\left(\frac{\text{全}}{2}+\frac{\text{等}}{2}+\frac{\text{全}}{2}-\frac{\text{等}}{2}\right)\times\left(\frac{\text{全}}{2}+\frac{\text{等}}{2}-\frac{\text{全}}{2}+\frac{\text{等}}{2}\right)=\text{全}\times\text{等}$$

両辺の平方根をとって　（イセ）は　正数なので複号のプラス側を採る。

$$(\text{イセ})=\sqrt{\text{全}\times\text{等}}\qquad\cdot\cdot\cdot(1)$$

直角三角形イセウと　直角三角形キサウは　角イウセを共有するので　相似。

$(\text{キサ}):(\text{サウ})=(\text{イセ}):(\text{セウ})$

$(\text{キサ})\times(\text{セウ})=(\text{サウ})\times(\text{イセ})$

ここで、$(\text{セウ})=\dfrac{\text{全}}{2}-\dfrac{\text{等}}{2}$，$(\text{サウ})=\dfrac{\text{全}}{2}$，（１）から　$(\text{イセ})=\sqrt{\text{全}\times\text{等}}$　なので

$$(\text{キサ})\times\left(\frac{\text{全}}{2}-\frac{\text{等}}{2}\right)=\frac{\text{全}}{2}\times\sqrt{\text{全}\times\text{等}}$$

$$(\text{キサ})\times(\text{全}-\text{等})=\text{全}\times\sqrt{\text{全}\times\text{等}}$$

$$(\text{キサ})=\frac{\text{全}\times\sqrt{\text{全}\times\text{等}}}{\text{全}-\text{等}}\qquad\cdot\cdot\cdot(2)$$

図２では、キやスの周辺がよくわからないので、
下の等円を無視して、上の等円と大円の関係を
分かりやすく図３のように書く。
図３では、各点の記号は図２と同じ。

線分オキの長さを　子，線分キサの長さを　丑，
線分エスの長さを　寅，線分スコの長さを　卯，
線分キスの長さを　甲とする。

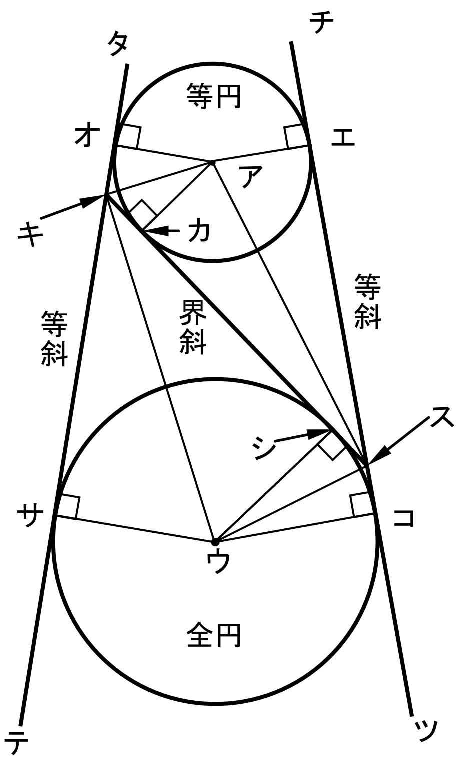


図３

上の等円と全円の外接線２本は長さが等しいので、

(オサ) = (エコ)

ここで、(オサ) = (オキ) + (キサ) = 子 + 丑，(エコ) = (エス) + (スコ) = 寅 + 卯　なので

子 + 丑 = 寅 + 卯　・・・（３）

直角三角形アオキと　直角三角形アカキは　斜辺アキを共有するので　合同。

(オキ) = (カキ) = 子　・・・（４）

角アキオ = 角アキカ　・・・（５）

直角三角形ウコスと　直角三角形ウシスは　斜辺ウスを共有するので　合同。

(スコ) = (スシ) = 卯　・・・（６）

直角三角形スエアと　直角三角形スカアは　斜辺スアを共有するので、合同。

(スエ) = (スカ) = (キス) − (キカ)

ここで、(スエ) = (スカ) = 寅，(キス) = 甲，(キカ) = 子　なので

寅 = 甲 − 子　・・・（７）

直角三角形キサウと　直角三角形キシウは　斜辺キウを共有するので、合同。

(キサ) = (キシ) = (キス) − (スシ)

ここで、(キサ) = (キシ) = 丑，(キス) = 甲，(スシ) = 卯　なので

丑 = 甲 − 卯　・・・（８）

角ウキサ = 角ウキシ　・・・（９）

（３）に（７），（８）を代入して

子 + 甲 − 卯 = 甲 − 子 + 卯

２ × 子 = ２ × 卯

子 = 卯　・・・（１０）

図３から

角オキカ + 角サキシ = ２ × 直角

ここで、(５)から　角オキカ = 角アキオ + 角アキカ = ２ × 角アキオ，

(９)から　角サキシ = 角ウキサ + 角ウキシ = ２ × 角ウキサ　なので

２ × 角アキオ + ２ × 角ウキサ = ２ × 直角

角アキオ + 角ウキサ = 直角　・・・（１１）

直角三角形キサウの　内角の和から

角ウキサ + 角キウサ + 直角 = ２ × 直角

角ウキサ + 角キウサ = 直角　・・・（１２）

（１１），（１２）から　角アキオ＝角キウサ

直角以外の一つの角が等しいので　直角三角形アオキと　直角三角形キサウは　相似。

(アオ) : (オキ) = (キサ) : (サウ)

$(アオ)\times(サウ)=(オキ)\times(キサ)$

ここで、$(アオ)=\dfrac{等}{2}$，$(サウ)=\dfrac{全}{2}$，$(オキ)=子$，$(キサ)=丑$　なので

$$\frac{等}{2}\times\frac{全}{2}=子\times丑$$

$$子=\frac{全\times等}{4\times丑} \qquad ・・・（１３）$$

丑＝（キサ）なので　（１３）に（２）を代入して

$$子=\frac{全\times等}{4\times\dfrac{全\times\sqrt{全\times等}}{全-等}}=\frac{全\times等\times(全-等)}{4\times全\times\sqrt{全\times等}}=\frac{等\times(全-等)}{4\times\sqrt{全\times等}}=\frac{等\times(全-等)\times\sqrt{全\times等}}{4\times\sqrt{全\times等}\times\sqrt{全\times等}}$$

$$子=\frac{等\times(全-等)\times\sqrt{全\times等}}{4\times全\times等}=\frac{(全-等)\times\sqrt{全\times等}}{4\times全} \qquad ・・・（１４）$$

（8），（１０）から

$甲=丑+子$

（2），（１４）を代入して

$$甲=\frac{全\times\sqrt{全\times等}}{全-等}+\frac{(全-等)\times\sqrt{全\times等}}{4\times全}=\frac{4\times全^2\times\sqrt{全\times等}+(全-等)^2\times\sqrt{全\times等}}{4\times全\times(全-等)}$$

$$=\frac{\left(5\times全^2-2\times全\times等+等^2\right)\times\sqrt{全\times等}}{4\times全\times(全-等)}$$

答え　界斜の長さは　$\dfrac{\left(5\times全^2-2\times全\times等+等^2\right)\times\sqrt{全\times等}}{4\times全\times(全-等)}$　で求められる

２０１８年１月１５日