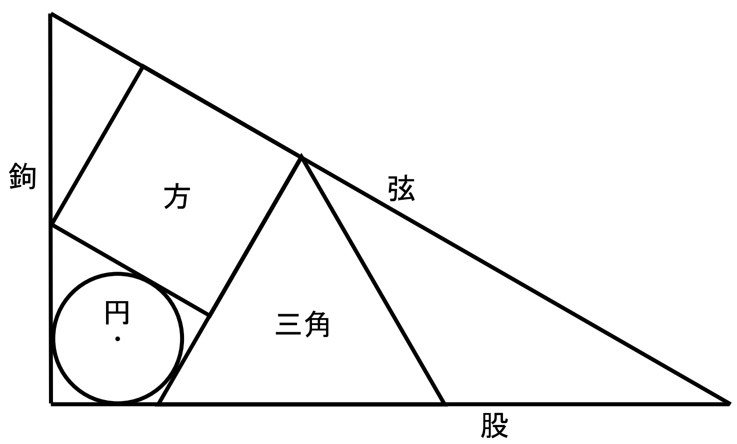
群馬の算額　２９－２　山名八幡宮　　文化１１年



仮令有如図鉤股内方円及三角
只云鉤股弦三角面方面円径
共六和若干
問得鉤股積術

〔問題の意味〕

図のように、直角三角形の中に、正方形，円，正三角形を容れる。
直角三角形の三辺，正三角形の一辺，正方形の一辺，円の直径の六個の長さの和から、直角三角形の面積を求めよ。
（答えは、根号を含む式で良いことにします。）

〔解法例〕

図２のように作図する。
直角三角形を　アイウとする。
円の中心を　エとする。
エから線分イウへ下した垂線の足を　オとする。
正三角形の線分イウ上の辺をカキとする。
正三角形を　カキクとする。
辺カキの中点を　ケとする。
正方形を　クコサシとする。
エから線分アイへ下した垂線の足を　スとする。

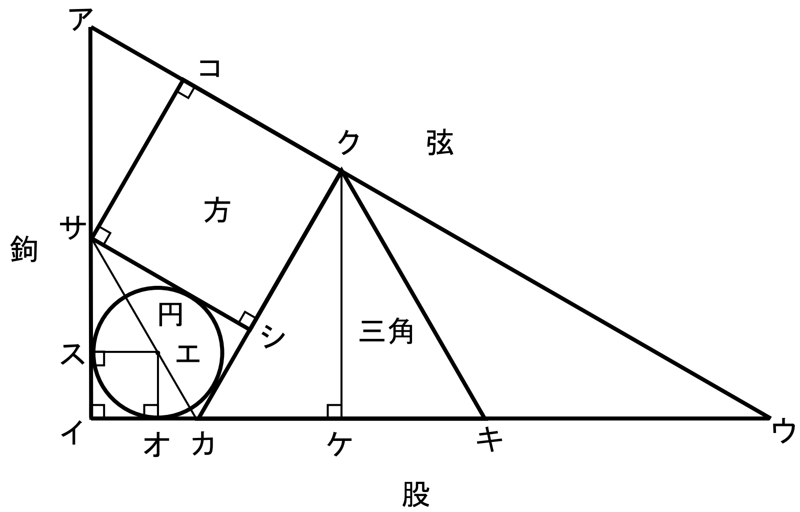


図２

直角三角形の線分アイを　鉤，線分イウを　股，線分アウを　弦とする。
正三角形の辺の長さを　子，正方形の辺の長さを　丑，円の直径を　寅とする。
鉤，股，弦，子，丑，寅の和を　甲とする。

三角形クカキは正三角形なので、辺カキの中点ケと頂点クを結ぶ線分クケは辺カキに直交する。
直角三角形カケクで　三平方の定理から

$$(クケ)^2=(クカ)^2-(カケ)^2$$

ここで、$(クカ)=子,\ (カケ)=\dfrac{子}{2}$　なので

$$(クケ)^2=子^2-\left(\frac{子}{2}\right)^2=子^2-\frac{子^2}{4}=\frac{3}{4}\times 子^2$$

両辺の平方根をとって、（クケ）は　正数なので

$$(クケ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 子 \qquad ・・・（１）$$

（１）から、直角三角形カケクの三辺の長さの比は

$$(カケ):(クカ):(クケ)=1:2:\sqrt{3} \qquad ・・・（２）$$

三角形クカキは正三角形なので、３つの角の大きさは等しい
角クカキ＝角カキク＝角キクカ
辺カキは、線分イキ上にあるので
角イカク＝角カキク＋角キクカ＝２×角クカキ
ここで、直角三角形カイサと　直角三角形カシサは　斜辺を共有するので　合同。

$$角サカイ=角サカシ=\frac{1}{2}\times 角イカク=角クカキ$$

直角以外の角の大きさが等しいので、直角三角形カケクと　直角三角形カイサは　相似。
同様に、直角三角形カケクと　直角三角形カシサは　相似。
線分イカの長さを　乙とすると　・・・（３）

$$(カシ)=(イカ)=乙$$

$$丑=(シサ)=\sqrt{3}\times(イカ)=\sqrt{3}\times 乙 \qquad ・・・（４）$$

$$子=(クカ)=(クシ)+(カシ)=丑+乙=\sqrt{3}\times 乙+乙=\left(1+\sqrt{3}\right)\times 乙 \qquad ・・・（５）$$

直角三角形カケクと　直角三角形カクウは　角クカキを共有するので　相似。

$$(カウ)=2\times(クカ)=2\times 子=2\times\left(1+\sqrt{3}\right)\times 乙=\left(2+2\times\sqrt{3}\right)\times 乙 \qquad ・・・（６）$$

$$(クウ)=\sqrt{3}\times(クカ)=\sqrt{3}\times 子=\sqrt{3}\times\left(1+\sqrt{3}\right)\times 乙=\left(3+\sqrt{3}\right)\times 乙 \qquad ・・・（７）$$

直角三角形カクウと　直角三角形アイウは　角カウクを共有するので　相似。
直角三角形アイウと　直角三角形アコサは　角コアサを共有するので　相似。
したがって、直角三角形アコサと　直角三角形カシサは　対応する線分コサと線分シサの長さが等

しいので、合同。

$(アコ)=乙$ ・・・(8)

$(アサ)=2\times(アコ)=2\times乙$ ・・・(9)

$鉤=(アサ)+(サイ)=2\times乙+\sqrt{3}\times乙=\left(2+\sqrt{3}\right)\times乙$ ・・・(10)

$股=(イカ)+(カウ)=乙+\left(2+2\times\sqrt{3}\right)\times乙=\left(3+2\times\sqrt{3}\right)\times乙$ ・・・(11)

$弦=(アコ)+(コク)+(クウ)=乙+\sqrt{3}\times乙+\left(3+\sqrt{3}\right)\times乙=\left(4+2\times\sqrt{3}\right)\times乙$ ・・・(12)

直角三角形カイサと　直角三角形エスサは　角エサスを共有するので　相似。

$(カイ):(イサ)=(エス):(スサ)$

$(カイ)\times(スサ)=(イサ)\times(エス)$

ここで、$(カイ)=乙$，$(スサ)=(イサ)-(イス)=\sqrt{3}\times乙-\dfrac{寅}{2}$，$(イサ)=\sqrt{3}\times乙$，$(エス)=\dfrac{寅}{2}$　なので

$$乙\times\left(\sqrt{3}\times乙-\frac{寅}{2}\right)=\sqrt{3}\times乙\times\frac{寅}{2}$$

$$2\times\sqrt{3}\times乙^2-乙\times寅=\sqrt{3}\times乙\times寅$$

乙は　0　でないので、両辺を　乙　で割って、右辺と左辺を入れ替えて

$$\sqrt{3}\times寅=2\times\sqrt{3}\times乙-寅$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\times寅=2\times\sqrt{3}\times乙$$

$$寅=\frac{2\times\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\times乙=\frac{2\times\sqrt{3}\times\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\times\left(1-\sqrt{3}\right)}\times乙=\frac{2\times\left(\sqrt{3}-3\right)}{1-3}\times乙=\left(3-\sqrt{3}\right)\times乙$$

$寅=\left(3-\sqrt{3}\right)\times乙$ ・・・(13)

$$\begin{aligned}甲&=鉤+股+弦+子+丑+寅\\&=\left(2+\sqrt{3}\right)\times乙+\left(3+2\times\sqrt{3}\right)\times乙+\left(4+2\times\sqrt{3}\right)\times乙\\&\quad+\left(1+\sqrt{3}\right)\times乙+\sqrt{3}\times乙+\left(3-\sqrt{3}\right)\times乙\\&=\left(13+6\times\sqrt{3}\right)\times乙\end{aligned}$$ ・・・(14)

直角三角形アイウの面積は

$$(直角三角形アイウ)=\frac{1}{2}\times股\times鉤=\frac{1}{2}\times\left(3+2\times\sqrt{3}\right)\times乙\times\left(2+\sqrt{3}\right)\times乙$$

$$(\text{直角三角形アイウ})=\frac{1}{2}\times\left(12+7\times\sqrt{3}\right)\times\text{乙}^2 \qquad \cdots(15)$$

（１４）から

$$\left(13+6\times\sqrt{3}\right)\times\text{乙}=\text{甲}$$

両辺を２乗して

$$\left(13+6\times\sqrt{3}\right)^2\times\text{乙}^2=\text{甲}^2$$

$$\left(169+156\times\sqrt{3}+108\right)\times\text{乙}^2=\text{甲}^2$$

$$\text{乙}^2=\frac{1}{277+156\times\sqrt{3}}\times\text{甲}^2 \qquad \cdots(16)$$

（１５）に（１６）を代入して

$$(\text{直角三角形アイウ})=\frac{1}{2}\times\left(12+7\times\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{277+156\times\sqrt{3}}\times\text{甲}^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\left(12+7\times\sqrt{3}\right)\times\left(277-156\times\sqrt{3}\right)}{\left(277+156\times\sqrt{3}\right)\times\left(277-156\times\sqrt{3}\right)}\times\text{甲}^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3324+1939\times\sqrt{3}-1872\times\sqrt{3}-3276}{76729-73008}\times\text{甲}^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{48+67\times\sqrt{3}}{3721}\times\text{甲}^2=\frac{48+67\times\sqrt{3}}{7442}\times\text{甲}^2$$

答え　直角三角形の面積は

$$\frac{48+67\times\sqrt{3}}{7442}\times\left(\text{直角三角形の三辺，正三角形の一辺，正方形の一辺，円の直径の総和}\right)^2$$

で求められる

２０１８年１月１４日