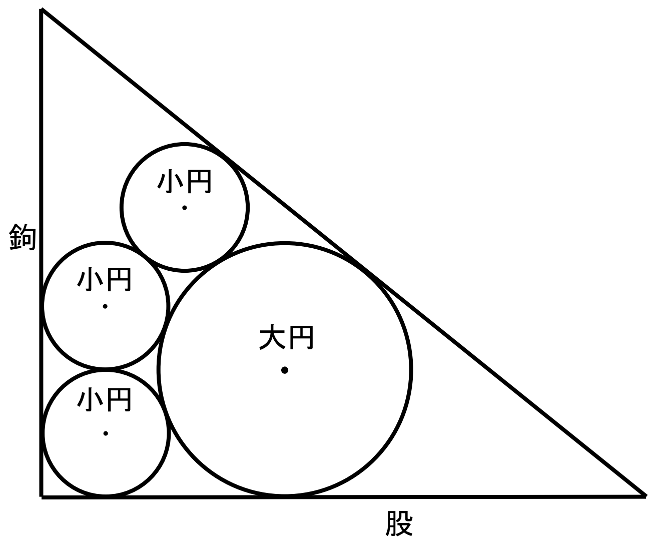
群馬の算額　２９－４　山名八幡宮　　文化１１年



今有如図鉤股内容
大円一個小円三個
只云鉤三寸
問股如何

〔問題の意味〕

図のように、直角三角形の内に大円１個と小円３個を容れる。
鉤（直角三角形の直角を挟む辺の短い方）の長さが３寸のとき、
股（直角三角形の直角を挟む辺の長い方）の長さは、いくらか。
（答えは、無理数になるので、根号を含んだ形で良い。
少数の近似値で表す場合は、寸の単位で、少数点以下３位までで良い。）

〔解法例〕

図２のように作図する。
直角三角形を　アイウとする。
大円の中心を　エ,
下の小円の中心を　オ,
中の小円の中心を　カ,
上の小円の中心を　キとする。

エから線分イウへ下した垂線の足を　クとする。
エから線分アウへ下した垂線の足を　ケとする。
オから線分イウへ下した垂線の足を　コとする。

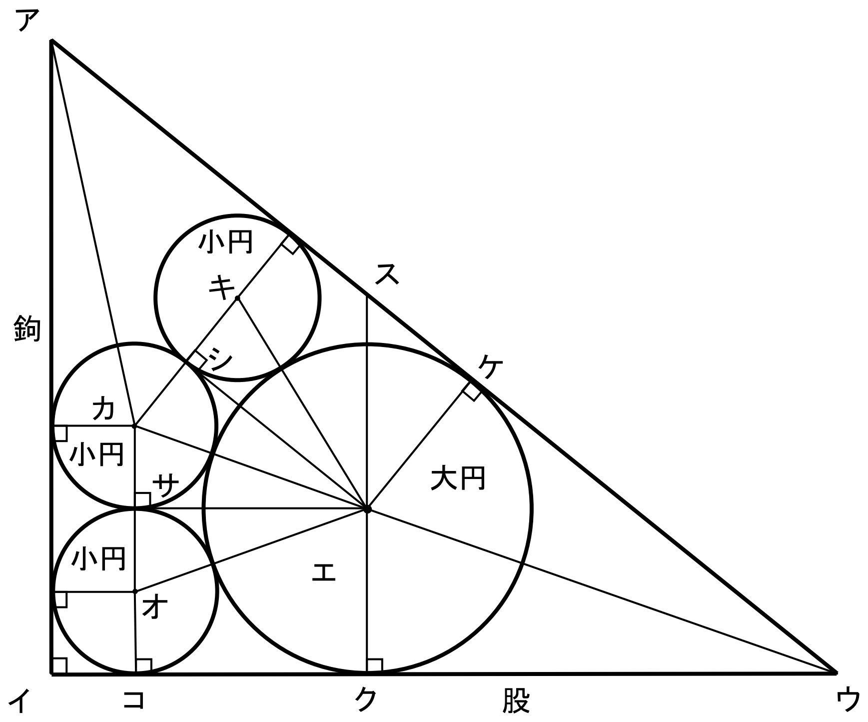


図２

下の小円と中の小円の接点を　サ，中の小円と上の小円の接点を　シとする。
線分クエの延長と線分アウの交点を　スとする。

大円の直径を　大，小円の直径を　小とする。
線分スエの長さを　子，線分スケの長さを　丑とする

三角形エカオで、$(エカ)=\frac{大}{2}+\frac{小}{2}$，$(エオ)=\frac{大}{2}+\frac{小}{2}$，$(カサ)=\frac{小}{2}$，$(オサ)=\frac{小}{2}$　なので
二等辺三角形であることが分かる。また、サは二等辺三角形の底辺の中点であることが分かる。
このことから、線分カオと線分エサは直交する。（図２に書き込んだ。）
したがって、四辺形エサコクは長方形である。
$(サコ)=(エク)$
ここで、$(サコ)=小$，$(エク)=\frac{大}{2}$　なので

$小=\frac{大}{2}$　・・・（１）

直角三角形エサカで　三平方の定理から

$(エサ)^2=(エカ)^2-(カサ)^2$

ここで、$(エカ)=\frac{大}{2}+\frac{小}{2}$，$(カサ)=\frac{小}{2}$，$(1)$から$\frac{大}{2}=小$　なので

$$(エサ)^2=\left(\frac{大}{2}+\frac{小}{2}\right)^2-\left(\frac{小}{2}\right)^2=\left(小+\frac{小}{2}\right)^2-\left(\frac{小}{2}\right)^2=\frac{9\times小^2-小^2}{2^2}=\frac{8\times小^2}{4}=2\times小^2$$

（エサ）は　正数　なので

$(エサ)=\sqrt{2}\times小$　・・・（２）

直角三角形エサカ　と　直角三角形ウクエ　は　相似
（線分エサと線分ウクは平行なので、角サエカと角クウエは平行線のさっ角で大きさが等しいから）
$(カサ):(サエ)=(エク):(クウ)$
$(カサ)\times(クウ)=(サエ)\times(エク)$
ここで、$(カサ)=\frac{小}{2}$，(2)から　$(サエ)=\sqrt{2}\times小$，$(エク)=\frac{大}{2}$　なので

$\frac{小}{2}\times(クウ)=\sqrt{2}\times小\times\frac{大}{2}$

$(クウ)=\sqrt{2}\times大$　・・・(5)

直角三角形ウクエ　と　直角三角形ウケエ　は　合同　なので　$(クウ)=(ケウ)$

$(ケウ)=\sqrt{2}\times大$　・・・(6)

直角三角形アイウ　と　直角三角形スクウ　は　相似。（角クウスを共有する直角三角形なので）

$(アイ):(イウ)=(スク):(クウ)$
$(イウ)\times(スク)=(アイ)\times(クウ)$

ここで、$(イウ)=股,\ (スク)=(スエ)+(エク)=子+\dfrac{大}{2},\ (アイ)=鉤,$

(5)から　$(クウ)=\sqrt{2}\times大$　なので

$$股\times\left(子+\frac{大}{2}\right)=鉤\times\sqrt{2}\times大$$

$$子=\frac{鉤}{股}\times\sqrt{2}\times大-\frac{大}{2}=\left(\frac{鉤}{股}\times\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\times大 \qquad ・・・(7)$$

直角三角形アイウ　と　直角三角形スケエ　も　相似。(共に直角三角形スクウと相似なので)
$(アイ):(イウ)=(スケ):(ケエ)$
$(イウ)\times(スケ)=(アイ)\times(ケエ)$

ここで、$(イウ)=股,\ (スケ)=丑,\ (アイ)=鉤,\ (ケエ)=\dfrac{大}{2}$　なので

$$股\times丑=鉤\times\frac{大}{2}$$

$$丑=\frac{鉤}{股}\times\frac{大}{2} \qquad ・・・(8)$$

直角三角形スケエ　で　三平方の定理から

$$(スエ)^2=(スケ)^2+(ケエ)^2$$

ここで、$(スエ)=子,\ (スケ)=丑,\ (ケエ)=\dfrac{大}{2}$　なので

$$子^2=丑^2+\left(\frac{大}{2}\right)^2 \qquad ・・・(9)$$

(9)に(7),(8)を代入して

$$\left\{\left(\frac{鉤}{股}\times\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\times大\right\}^2=\left(\frac{鉤}{股}\times\frac{大}{2}\right)^2+\left(\frac{大}{2}\right)^2 \qquad ・・・(10)$$

$$\left(\frac{鉤}{股}\times2\times\sqrt{2}-1\right)^2\times\frac{大^2}{4}=\frac{鉤^2}{股^2}\times\frac{大^2}{4}+\frac{大^2}{4}$$

両辺を　$\dfrac{大^2}{4}$　で割って

$$\left(\frac{鉤}{股}\times 2\times\sqrt{2}-1\right)^2=\frac{鉤^2}{股^2}+1$$

$$8\times\frac{鉤^2}{股^2}-4\times\sqrt{2}\times\frac{鉤}{股}+1=\frac{鉤^2}{股^2}+1$$

$$7\times\frac{鉤^2}{股^2}-4\times\sqrt{2}\times\frac{鉤}{股}=0$$

$$\left(7\times\frac{鉤}{股}-4\times\sqrt{2}\right)\times\frac{鉤}{股}=0$$

$\frac{鉤}{股}$　は　０　ではないので

$$7\times\frac{鉤}{股}=4\times\sqrt{2}$$

$$7\times鉤=4\times\sqrt{2}\times股$$

$$股=\frac{7}{4\times\sqrt{2}}\times鉤=\frac{7\times\sqrt{2}}{8}\times鉤 \qquad ・・・（１１）$$

鉤＝３　を入れて

$$股=\frac{21\times\sqrt{2}}{8}$$

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41421$　とすると

$$股=\frac{21\times\sqrt{2}}{8}\fallingdotseq 2.625\times 1.41421=3.7123012\fallingdotseq 3.712$$

答え　　　股の長さは　$\frac{21\times\sqrt{2}}{8}$寸

または

股の長さは　　およそ　３．７１２寸

２０１８年１月１２日