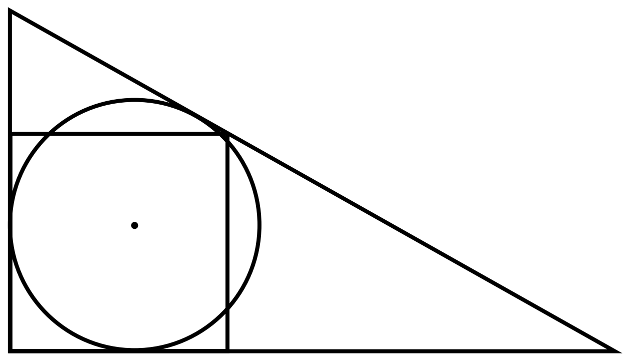
群馬の算額　５１－３　稲荷神社　　文政１１年



今有鉤股内容全円及全方
只云全円径七寸
又云以全方面為鉤以弦為股
所求鉤股内容円其円径五寸
問原鉤股弦三和幾何

〔問題の意味〕

図のように、直角三角形の中に、全円と呼ぶ内接円と全方と呼ぶ内接する正方形を容れる。
全円の直径が７寸で、正方形の一辺の長さを直角をはさむ短い辺，元の直角三角形の斜辺の長さを直角をはさむ長い辺とする新しい直角三角形の内接円の直径が５寸のとき、元の直角三角形の三辺の和はいくらか。

〔解法例〕

図２のように作図する。
元の直角三角形を　アイウとする。
新しい直角三角形の一辺の長さが元の直角三角形アイウの斜辺の長さと等しいので、新しい直角三角形を図２のように重ねて書く。

新しい直角三角形を　オアウとする。
全円の中心を　エとする。
新しい直角三角形の内接円を甲円とし、甲円の中心を　カとする。
正方形を　サコシイとする。
線分アウと全円の接点を　ケ，線分アイと全円の接点を　キ，線分イウと全円の接点を　クとする。

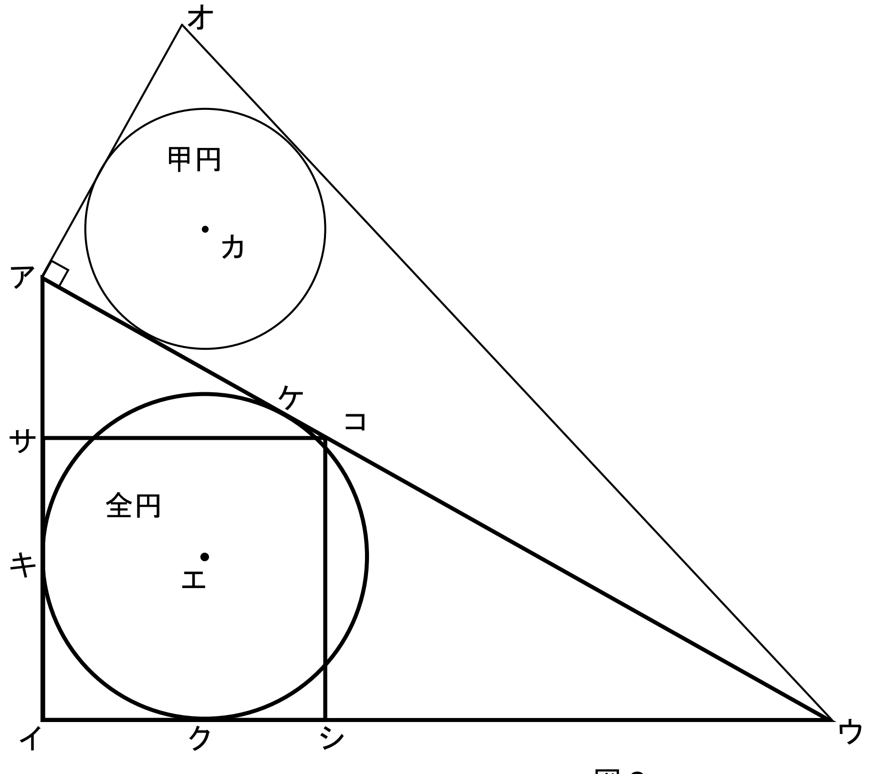


図２

全円の直径を　全，甲円の直径を　甲とする。
線分アイの長さを　子，線分イウの長さを　丑，線分アウの長さを　寅とする。
また、子＋丑＋寅　を　乙とする。
正方形の一辺の長さを　卯とする。線分オウの長さを　辰とする。

問題の条件から
$(\text{オア}) = \text{卯}$ 　　　　・・・（１）

図２から
$(\text{アイ}) + (\text{イウ}) + (\text{アウ}) = (\text{アキ}) + (\text{キイ}) + (\text{イク}) + (\text{クウ}) + (\text{アケ}) + (\text{ケウ})$
ここで、$(\text{アキ}) = (\text{アケ}),\ (\text{キイ}) = (\text{イク}),\ (\text{クウ}) = (\text{ケウ})$　なので
$(\text{アイ}) + (\text{イウ}) + (\text{アウ}) = 2 \times (\text{アケ}) + 2 \times (\text{キイ}) + 2 \times (\text{ケウ})$
ここで、$(\text{アイ}) + (\text{イウ}) + (\text{アウ}) = \text{子} + \text{丑} + \text{寅} = \text{乙},\ (\text{アケ}) + (\text{ケウ}) = (\text{アウ}) = \text{寅},$

$(\text{キイ}) = \dfrac{\text{全}}{2},$　　なので

$\text{乙} = 2 \times \text{寅} + \text{全}$
$\text{寅} = \dfrac{\text{乙} - \text{全}}{2}$ 　　　　・・・（２）

直角三角形アイウ　と　直角三角形アサコ　は相似。
$(\text{アイ}) : (\text{イウ}) = (\text{アサ}) : (\text{サコ})$
$(\text{アイ}) \times (\text{サコ}) = (\text{イウ}) \times (\text{アサ})$
ここで、$(\text{アイ}) = \text{子},\ (\text{サコ}) = \text{卯},\ (\text{イウ}) = \text{丑},\ (\text{アサ}) = (\text{アイ}) - (\text{サイ}) = \text{子} - \text{卯}$　なので
$\text{子} \times \text{卯} = \text{丑} \times (\text{子} - \text{卯}) = \text{丑} \times \text{子} - \text{丑} \times \text{卯}$
$\text{子} \times \text{卯} + \text{丑} \times \text{卯} = \text{丑} \times \text{子}$
$\text{卯} = \dfrac{\text{丑} \times \text{子}}{\text{丑} + \text{子}}$ 　　　　・・・（３）

直角三角形アイウの面積を２つの方法で求めて

$(\text{直角三角形アイウの面積}) = \dfrac{1}{2} \times (\text{アイ}) \times (\text{イウ})$

ここで、$(\text{アイ}) = \text{子},\ (\text{イウ}) = \text{丑}$　なので

$(\text{直角三角形アイウの面積}) = \dfrac{1}{2} \times \text{子} \times \text{丑}$ 　　　　・・・（４）

$(\text{直角三角形アイウの面積}) = \dfrac{1}{2} \times \{(\text{アイ}) \times (\text{エキ}) + (\text{イウ}) \times (\text{エク}) + (\text{アウ}) \times (\text{エケ})\}$

ここで、$(\text{アイ}) = \text{子},\ (\text{イウ}) = \text{丑},\ (\text{アウ}) = \text{寅},\ (\text{エキ}) = (\text{エク}) = (\text{エケ}) = \dfrac{\text{全}}{2}$　なので

$(\text{直角三角形アイウの面積}) = \dfrac{1}{2} \times \left\{\text{子} \times \dfrac{\text{全}}{2} + \text{丑} \times \dfrac{\text{全}}{2} + \text{寅} \times \dfrac{\text{全}}{2}\right\}$

$$(\text{直角三角形アイウの面積})=\frac{1}{2}\times(\text{子}+\text{丑}+\text{寅})\times\frac{\text{全}}{2} \qquad ・・・（５）$$

（４），（５）から

$$\text{子}\times\text{丑}=(\text{子}+\text{丑}+\text{寅})\times\frac{\text{全}}{2} \qquad ・・・（６）$$

直角三角形アイウ　で　三平方の定理から

$$(\text{アイ})^2+(\text{イウ})^2=(\text{アウ})^2$$

ここで、$(\text{アイ})=\text{子}$，$(\text{イウ})=\text{丑}$，$(\text{アウ})=\text{寅}$　なので

$$\text{子}^2+\text{丑}^2=\text{寅}^2 \qquad ・・・（７）$$

新しい直角三角形オアウ　で　三平方の定理から

$$(\text{オア})^2+(\text{アウ})^2=(\text{オウ})^2$$

ここで、$(\text{オア})=\text{卯}$，$(\text{アウ})=\text{寅}$，$(\text{オウ})=\text{辰}$　なので

$$\text{卯}^2+\text{寅}^2=\text{辰}^2 \qquad ・・・（８）$$

新しい直角三角形オアウの面積を２つの方法で求めて

$$(\text{直角三角形オアウの面積})=\frac{1}{2}\times(\text{オア})\times(\text{アウ})$$

ここで、$(\text{オア})=\text{卯}$，$(\text{アウ})=\text{寅}$　なので

$$(\text{直角三角形オアウの面積})=\frac{1}{2}\times\text{卯}\times\text{寅} \qquad ・・・（９）$$

$$(\text{直角三角形オアウの面積})=\frac{1}{2}\times\{(\text{オア})+(\text{アウ})+(\text{オウ})\}\times\frac{\text{甲}}{2}$$

ここで、$(\text{オア})=\text{卯}$，$(\text{アウ})=\text{寅}$，$(\text{オウ})=\text{辰}$　なので

$$(\text{直角三角形オアウの面積})=\frac{1}{2}\times(\text{卯}+\text{寅}+\text{辰})\times\frac{\text{甲}}{2} \qquad ・・・（１０）$$

（９），（１０）から

$$\text{卯}\times\text{寅}=(\text{卯}+\text{寅}+\text{辰})\times\frac{\text{甲}}{2} \qquad ・・・（１１）$$

$$\frac{\text{辰}\times\text{甲}}{2}=\text{卯}\times\text{寅}-(\text{卯}+\text{寅})\times\frac{\text{甲}}{2} \qquad ・・・（１２）$$

（１２）の両辺を２乗して

$$\frac{\text{辰}^2\times\text{甲}^2}{4}=\left\{\text{卯}\times\text{寅}-(\text{卯}+\text{寅})\times\frac{\text{甲}}{2}\right\}^2 \qquad ・・・（１３）$$

（１３）に　（８），（３）を代入して　辰　と　卯　を消去すると

$$\frac{\left\{\left(\frac{丑\times子}{丑+子}\right)^2+寅^2\right\}\times甲^2}{4}=\left\{\frac{丑\times子}{丑+子}\times寅-\left(\frac{丑\times子}{丑+子}+寅\right)\times\frac{甲}{2}\right\}^2$$

両辺に　４　をかけて

$$\left\{\left(\frac{丑\times子}{丑+子}\right)^2+寅^2\right\}\times甲^2=\left\{2\times\frac{丑\times子}{丑+子}\times寅-\left(\frac{丑\times子}{丑+子}+寅\right)\times甲\right\}^2$$

両辺に　$(丑+子)^2$　をかけて

$$\left\{(丑\times子)^2+寅^2\times(丑+子)^2\right\}\times甲^2=\left[2\times丑\times子\times寅-\{丑\times子+寅\times(丑+子)\}\times甲\right]^2$$

$$\left\{子^2\times丑^2+寅^2\times(子+丑)^2\right\}\times甲^2=\left[2\times子\times丑\times寅-\{子\times丑+丑\times寅+寅\times子\}\times甲\right]^2$$

$$=4\times子^2\times丑^2\times寅^2-4\times子\times丑\times寅\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)\times甲$$

$$+(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)^2\times甲^2$$

$$=4\times子^2\times丑^2\times寅^2-4\times子\times丑\times寅\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)\times甲$$

$$+\Big(子^2\times丑^2+丑^2\times寅^2+寅^2\times子^2+2\times子\times丑^2\times寅+2\times丑\times寅^2\times子$$

$$+2\times寅\times子^2\times丑\Big)\times甲^2$$

$$0=4\times子^2\times丑^2\times寅^2-4\times子\times丑\times寅\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)\times甲$$

$$+\left(2\times子\times丑^2\times寅+2\times寅\times子^2\times丑\right)\times甲^2$$

$$2\times子\times丑\times寅\times(子+丑)\times甲^2-4\times子\times丑\times寅\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)\times甲$$

$$+4\times子^2\times丑^2\times寅^2=0$$

両辺を　２×子×丑×寅　で割って

$$(子+丑)\times甲^2-2\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)\times甲+2\times子\times丑\times寅=0 \quad ・・・（１４）$$

（１４）の各係数を別々に検討する。

$$子+丑=子+丑+寅-寅=乙-寅 \quad ・・・（１５）$$

（１５）の　寅　に（２）を入れて

$$子+丑=乙-\frac{乙-全}{2}=\frac{乙+全}{2} \quad ・・・（１６）$$

$$2\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)=2\times\{子\times丑+(子+丑)\times寅\} \quad \cdots(17)$$

（１７）に（６），（１６），（２）を入れて

$$2\times(子\times丑+丑\times寅+寅\times子)=2\times\left(乙\times\frac{全}{2}+\frac{乙+全}{2}\times\frac{乙-全}{2}\right)$$

$$=乙\times全+\frac{(乙+全)\times(乙-全)}{2}=乙\times全+\frac{乙^2-全^2}{2} \quad \cdots(18)$$

２×子×丑×寅　に　（６），（２）を入れて

$$2\times子\times丑\times寅=2\times乙\times\frac{全}{2}\times\frac{乙-全}{2}=\frac{乙\times全\times(乙-全)}{2} \quad \cdots(19)$$

（１４）に（１６），（１８），（１９）を適用して

$$\frac{乙+全}{2}\times甲^2-\left(乙\times全+\frac{乙^2-全^2}{2}\right)\times甲+\frac{乙\times全\times(乙-全)}{2}=0$$

両辺に２をかけて

$$(乙+全)\times甲^2-\left(2\times乙\times全+乙^2-全^2\right)\times甲+乙\times全\times(乙-全)=0$$

$$甲^2\times乙+全\times甲^2-2\times全\times甲\times乙-甲\times乙^2+全^2\times甲+全\times乙^2-全^2\times乙=0$$

$$(全-甲)\times乙^2-\left(全^2+2\times全\times甲-甲^2\right)\times乙+全\times甲\times(全+甲)=0$$

$$(乙-甲)\times\{(全-甲)\times乙-全\times(全+甲)\}=0$$

$乙=甲$　または　$乙=\frac{全\times(全+甲)}{全-甲}$

図２から、元の直角三角形アイウの三辺の和　乙は、甲円の直径よりも大きいので

$乙\neq甲$

したがって

$$乙=\frac{全\times(全+甲)}{全-甲}$$

全＝７，甲＝５　を入れて

$$乙=\frac{7\times(7+5)}{7-5}=\frac{7\times12}{2}=7\times6=42$$

答え　　元の直角三角形の三辺の和は　　　４２寸

２０１８年１月１０日