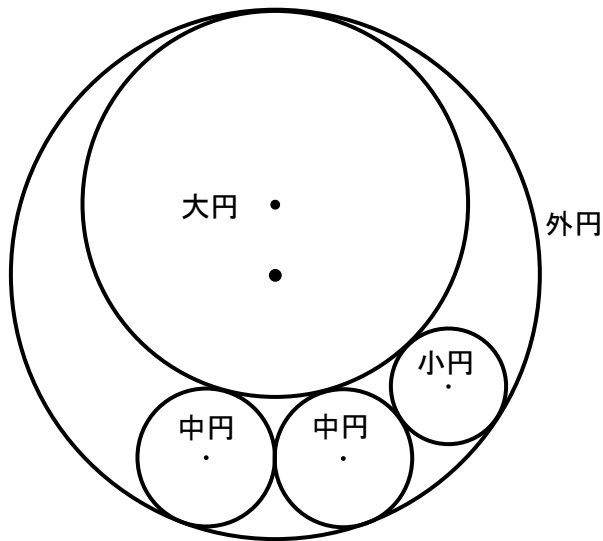


群馬の算額 43-1 清水寺

文政7年



今有如図円内容大中小三円
外円径四寸欲小円最多
問小円径幾何

〔問題の意味〕

図のように、外円内に大中小の3種類の円が入っている。
外円の直径が4寸のとき、小円の直径を最大にしたい。
小円の直径はいくらか。

〔解法例〕

図2のように作図する。

外円の中心を ア, 大円の中心を イ,

右側の中円の中心を ウ,

小円の中心を エ,

左側の中円の中心を オとする。

二つの中円の接点を カとする。

エから線分イカへ下した垂線の足を

キとする。

外円と右側の中円の接点を ク,

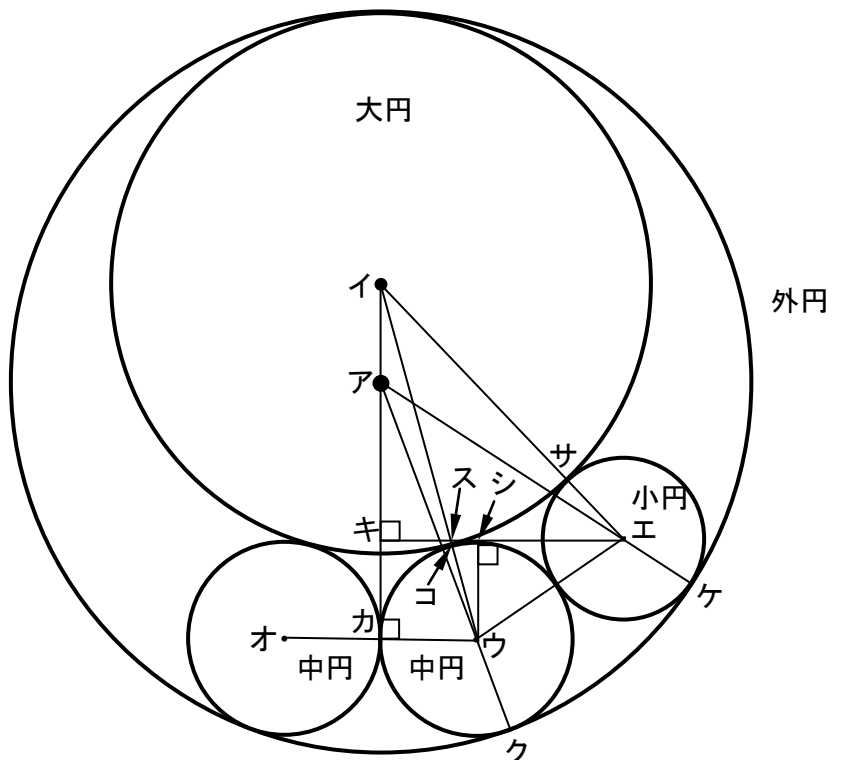
外円と小円の接点を ケとする。

大円と右側の中円の接点を コとする。

大円と小円の接点を サとする。

ウから線分エキへ下した垂線の足を

シとする。



線分イウと線分キシの交点を スとする。

図2

線分アカの長さを 子, 線分アキの長さを 丑, 線分エキの長さを 寅とする。

外円の直径を 外, 大円の直径を 大, 中円の直径を 中, 小円の直径を 小とする。

直角三角形アカウ で 三平方の定理から

$$(\text{アカ})^2 = (\text{アウ})^2 - (\text{カウ})^2$$

ここで、 $(\text{アカ}) = \text{子}$, $(\text{アウ}) = \frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{中}}{2}$, $(\text{カウ}) = \frac{\text{中}}{2}$ なので

$$\text{子}^2 = \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{中}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{中}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{中}}{2} + \frac{\text{中}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{中}}{2} - \frac{\text{中}}{2}\right) = \frac{\text{外}}{2} \times \left(\frac{\text{外}}{2} - \text{中}\right)$$

$$4 \times \text{子}^2 = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} \quad \dots (1)$$

直角三角形イカウ で 三平方の定理から

$$(\text{イカ})^2 = (\text{イウ})^2 - (\text{カウ})^2$$

ここで、 $(\text{イア}) = \frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{大}}{2}$, $(\text{イカ}) = (\text{イア}) + (\text{アカ}) = \frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{大}}{2} + \text{子}$, $(\text{イウ}) = \frac{\text{大}}{2} + \frac{\text{中}}{2}$,

$(\text{カウ}) = \frac{\text{中}}{2}$ なので

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{大}}{2} + \text{子}\right)^2 = \left(\frac{\text{大}}{2} + \frac{\text{中}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{中}}{2}\right)^2$$

$$(\text{外} - \text{大} + 2 \times \text{子})^2 = (\text{大} + \text{中})^2 - (\text{中})^2$$

$$\text{外}^2 + \text{大}^2 + 4 \times \text{子}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times \text{外} \times \text{子} - 4 \times \text{大} \times \text{子} = \text{大}^2 + 2 \times \text{大} \times \text{中} + \text{中}^2 - \text{中}^2$$

$$\text{外}^2 + 4 \times \text{子}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = 2 \times \text{大} \times \text{中} \quad \dots (2)$$

(2)の $4 \times \text{子}^2$ に (1)を代入して

$$\text{外}^2 + \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = 2 \times \text{大} \times \text{中}$$

$$2 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = 2 \times \text{大} \times \text{中} + 2 \times \text{外} \times \text{中}$$

$$\text{外}^2 - \text{外} \times \text{大} + 2 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = \text{大} \times \text{中} + \text{外} \times \text{中}$$

$$\text{外} \times (\text{外} - \text{大}) + 2 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = (\text{外} + \text{大}) \times \text{中}$$

$$2 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{子} = (\text{外} + \text{大}) \times \text{中} - \text{外} \times (\text{外} - \text{大})$$

$$2 \times \text{子} = \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{中} - \text{外} \quad \dots (3)$$

両辺を2乗して

$$4 \times \text{子}^2 = \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{中} - \text{外} \right)^2 \quad \dots (4)$$

(2)の $4 \times \text{子}^2$ に (1)を代入して

$$\text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} = \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{中} - \text{外} \right)^2$$

$$\text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} = \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \right)^2 \times \text{中}^2 - 2 \times \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{中} \times \text{外} + \text{外}^2$$

$$-2 \times \text{外} \times \text{中} = \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \right)^2 \times \text{中}^2 - 2 \times \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{中} \times \text{外}$$

ここで、中 は 0 でないので 両辺を 中 で割って

$$-2 \times \text{外} = \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \right)^2 \times \text{中} - 2 \times \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{外}$$

$$\left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \right)^2 \times \text{中} = 2 \times \left(\frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} - 1 \right) \times \text{外} = 2 \times \frac{\text{外} + \text{大} - \text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{外}$$

$$\frac{(\text{外} + \text{大})^2}{(\text{外} - \text{大})^2} \times \text{中} = 2 \times \frac{2 \times \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{外}$$

$$\text{中} = 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外}}{\text{外} - \text{大}} \times \frac{(\text{外} - \text{大})^2}{(\text{外} + \text{大})^2} = 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})}{(\text{外} + \text{大})^2} \quad \dots (5)$$

(5) を (3) に代入して

$$2 \times \text{子} = \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})}{(\text{外} + \text{大})^2} - \text{外} = 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外}}{\text{外} + \text{大}} - \text{外} = \frac{4 \times \text{大} \times \text{外} - \text{外} \times (\text{外} + \text{大})}{\text{外} + \text{大}}$$

$$= \frac{4 \times \text{大} \times \text{外} - \text{外}^2 - \text{外} \times \text{大}}{\text{外} + \text{大}} = \frac{3 \times \text{大} \times \text{外} - \text{外}^2}{\text{外} + \text{大}} = \frac{\text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外})}{\text{外} + \text{大}}$$

$$\text{子} = \frac{\text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外})}{2 \times (\text{外} + \text{大})} \quad \dots (6)$$

直角三角形アキエ で 三平方の定理から

$$(\text{アエ})^2 = (\text{アキ})^2 + (\text{キエ})^2$$

ここで、 $(\text{アエ}) = \frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{小}}{2}$, $(\text{アキ}) = \text{丑}$, $(\text{キエ}) = \text{寅}$ なので

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{小}}{2}\right)^2 = \text{丑}^2 + \text{寅}^2$$

$$(\text{外} - \text{小})^2 = 4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2 \quad \dots (7)$$

直角三角形イキエ で 三平方の定理から

$$(\text{イエ})^2 = (\text{イキ})^2 + (\text{キエ})^2$$

ここで、 $(\text{イエ}) = \frac{\text{大}}{2} + \frac{\text{小}}{2}$, $(\text{イキ}) = (\text{イア}) + (\text{アキ}) = \frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{大}}{2} + \text{丑}$, $(\text{キエ}) = \text{寅}$ なので

$$\left(\frac{\text{大}}{2} + \frac{\text{小}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{大}}{2} + \text{丑}\right)^2 + \text{寅}^2$$

$$(\text{大} + \text{小})^2 = (\text{外} - \text{大} + 2 \times \text{丑})^2 + 4 \times \text{寅}^2$$

$$\text{大}^2 + 2 \times \text{大} \times \text{小} + \text{小}^2 = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times \text{外} \times \text{丑} + \text{大}^2 - 4 \times \text{大} \times \text{丑} + 4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2$$

$$2 \times \text{大} \times \text{小} + \text{小}^2 = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} + 4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2 \quad \dots (8)$$

(8)の $4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2$ に (7) を代入して

$$2 \times \text{大} \times \text{小} + \text{小}^2 = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} + (\text{外} - \text{小})^2$$

$$2 \times \text{大} \times \text{小} + \text{小}^2 = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} + \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{小} + \text{小}^2$$

$$2 \times \text{大} \times \text{小} = 2 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} - 2 \times \text{外} \times \text{小}$$

$$\text{大} \times \text{小} = \text{外}^2 - \text{外} \times \text{大} + 2 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} - \text{外} \times \text{小}$$

$$2 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{丑} = -\text{外}^2 + \text{外} \times \text{大} + \text{外} \times \text{小} + \text{大} \times \text{小} = -\text{外} \times (\text{外} - \text{大}) + (\text{外} + \text{大}) \times \text{小}$$

$$2 \times \text{丑} = -\text{外} + \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{小} \quad \dots (9)$$

$$\text{丑} = -\frac{\text{外}}{2} + \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \frac{\text{小}}{2} \quad \dots (10)$$

直角三角形ウシエ で 三平方の定理から

$$(\text{ウエ})^2 = (\text{ウシ})^2 + (\text{シエ})^2$$

$$\text{ここで、} (\text{ウエ}) = \frac{\text{中}}{2} + \frac{\text{小}}{2}, (\text{ウシ}) = (\text{アカ}) - (\text{アキ}) = \text{子} - \text{丑},$$

$$(\text{シエ}) = (\text{キエ}) - (\text{キシ}) = \text{寅} - \frac{\text{中}}{2} \quad \text{なので}$$

$$\left(\frac{\text{中}}{2} + \frac{\text{小}}{2}\right)^2 = (\text{子} - \text{丑})^2 + \left(\text{寅} - \frac{\text{中}}{2}\right)^2$$

$$(\text{中} + \text{小})^2 = 4 \times (\text{子} - \text{丑})^2 + (2 \times \text{寅} - \text{中})^2$$

$$\text{中}^2 + 2 \times \text{中} \times \text{小} + \text{小}^2 = 4 \times \text{子}^2 - 8 \times \text{子} \times \text{丑} + 4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2 - 4 \times \text{寅} \times \text{中} + \text{中}^2$$

$$2 \times \text{中} \times \text{小} + \text{小}^2 = 4 \times \text{子}^2 - 8 \times \text{子} \times \text{丑} + (4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2) - 4 \times \text{寅} \times \text{中} \dots (11)$$

(11)の $4 \times \text{丑}^2 + 4 \times \text{寅}^2$ に (7)を代入して

$$2 \times \text{中} \times \text{小} + \text{小}^2 = 4 \times \text{子}^2 - 8 \times \text{子} \times \text{丑} + (\text{外} - \text{小})^2 - 4 \times \text{寅} \times \text{中}$$

$$2 \times \text{中} \times \text{小} = 4 \times \text{子}^2 - 8 \times \text{子} \times \text{丑} + \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{小} - 4 \times \text{寅} \times \text{中} \quad \dots (12)$$

(12)の $4 \times \text{子}^2$ に (1)を代入して

$$2 \times \text{中} \times \text{小} = \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} - 8 \times \text{子} \times \text{丑} + \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{小} - 4 \times \text{寅} \times \text{中}$$

$$2 \times \text{中} \times \text{小} = 2 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{中} - 8 \times \text{子} \times \text{丑} - 2 \times \text{外} \times \text{小} - 4 \times \text{寅} \times \text{中}$$

$$\text{中} \times \text{小} = \text{外}^2 - \text{外} \times \text{中} - 4 \times \text{子} \times \text{丑} - \text{外} \times \text{小} - 2 \times \text{寅} \times \text{中}$$

$$4 \times \text{子} \times \text{丑} = \text{外}^2 - \text{外} \times \text{小} - \text{外} \times \text{中} - \text{中} \times \text{小} - 2 \times \text{寅} \times \text{中}$$

$$4 \times \text{子} \times \text{丑} = \text{外} \times (\text{外} - \text{小}) - \text{中} \times (\text{外} + \text{小} + 2 \times \text{寅}) \quad \dots (13)$$

(13)に、(6), (10), (5)を代入して

$$4 \times \frac{\text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外})}{2 \times (\text{外} + \text{大})} \times \left(-\frac{\text{外}}{2} + \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \frac{\text{小}}{2} \right)$$

$$= \text{外} \times (\text{外} - \text{小}) - 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})}{(\text{外} + \text{大})^2} \times (\text{外} + \text{小} + 2 \times \text{寅})$$

$$-\frac{\text{外}^2 \times (3 \times \text{大} - \text{外})}{(\text{外} + \text{大})} + \frac{\text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外})}{(\text{外} - \text{大})} \times \text{小}$$

$$= \text{外} \times (\text{外} - \text{小}) - 4 \times \frac{\text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})}{(\text{外} + \text{大})^2} \times (\text{外} + \text{小} + 2 \times \text{寅})$$

両辺に $(\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2$ をかけて

$$-\text{外}^2 \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大}) + (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times \text{小}$$

$$= \text{外}^2 \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 - (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{外} \times \text{小}$$

$$- 4 \times \text{大} \times \text{外}^2 \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} - \text{大}) - 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{小}$$

$$- 8 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{寅}$$

両辺を 外 で割って

$$-\text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大}) + (\text{外} + \text{大})^2 \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times \text{小}$$

$$= \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 - (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} - 4 \times \text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})^2$$

$$- 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{小} - 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅}$$

$$8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅}$$

$$= \text{外} \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大}) + \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2$$

$$- 4 \times \text{大} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})^2 - (\text{外} + \text{大})^2 \times (3 \times \text{大} - \text{外}) \times \text{小}$$

$$- (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} - 4 \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \text{小}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} \\
&= \left\{ (3 \times \text{大} - \text{外}) \times (\text{外} + \text{大}) + (\text{外} + \text{大})^2 - 4 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \right\} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \\
&\quad - (3 \times \text{大} - \text{外}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} - (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} \\
&\quad - 4 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{小}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} \\
&= \left\{ 3 \times \text{外} \times \text{大} - \text{外}^2 + 3 \times \text{大}^2 - \text{外} \times \text{大} + \text{外}^2 + 2 \times \text{外} \times \text{大} + \text{大}^2 - 4 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \right. \\
&\quad \left. \times \text{大}^2 \right\} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \\
&\quad - (3 \times \text{大} - \text{外} + \text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} - 4 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{小}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} \\
&= \left\{ 8 \times \text{大}^2 \right\} \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) - (2 \times \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小} - 4 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{小}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} \\
&= 8 \times \text{大}^2 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \\
&\quad - 2 \times \text{大} \times \left\{ \text{外}^2 + 2 \times \text{外} \times \text{大} + \text{大}^2 + 2 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{外} \times \text{大} + 2 \times \text{大}^2 \right\} \times \text{小}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} \\
&= 8 \times \text{大}^2 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) - 2 \times \text{大} \times \left\{ 3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right\} \times \text{小}
\end{aligned}$$

$$4 \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \text{寅} = 4 \times \text{大}^2 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) - \text{大} \times \left\{ 3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right\} \times \text{小}$$

$$\text{寅} = \frac{\text{外} \times \text{大}}{\text{外} - \text{大}} - \frac{3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2}{4 \times (\text{外} - \text{大})^2} \times \text{小} \quad \dots (14)$$

(7) に (10), (14) を代入して

$$(\text{外} - \text{小})^2 = 4 \times \left\{ -\frac{\text{外}}{2} + \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \frac{\text{小}}{2} \right\}^2 + 4 \times \left\{ \frac{\text{外} \times \text{大}}{\text{外} - \text{大}} - \frac{3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2}{4 \times (\text{外} - \text{大})^2} \times \text{小} \right\}^2$$

$$(\text{外} - \text{小})^2 = \left(-\text{外} + \frac{\text{外} + \text{大}}{\text{外} - \text{大}} \times \text{小} \right)^2 + \left\{ \frac{2 \times \text{外} \times \text{大}}{\text{外} - \text{大}} - \frac{3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2}{2 \times (\text{外} - \text{大})^2} \times \text{小} \right\}^2$$

両辺に $4 \times (\text{外} - \text{大})^4$ をかけて

$$\begin{aligned} & 4 \times (\text{外} - \text{大})^4 \times (\text{外} - \text{小})^2 \\ &= 4 \times \{ -\text{外} \times (\text{外} - \text{大}) + (\text{外} + \text{大}) \times \text{小} \}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \\ &+ \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) - \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \times \text{小} \right\}^2 \\ &- 4 \times (\text{外} - \text{大})^4 \times (\text{外} - \text{小})^2 + 4 \times \{ -\text{外} \times (\text{外} - \text{大}) + (\text{外} + \text{大}) \times \text{小} \}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \\ &+ \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) - \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \times \text{小} \right\}^2 = 0 \\ &- 4 \times (\text{外} - \text{大})^4 \times \left(\text{小}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{小} + \text{外}^2 \right) + 4 \\ &\times \left\{ (\text{外} + \text{大})^2 \times \text{小}^2 - 2 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大}) \times \text{小} + \text{外}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \right\} \times (\text{外} - \text{大})^2 \\ &+ \left\{ \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right)^2 \times \text{小}^2 - 2 \times 4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \right. \\ &\left. \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \times \text{小} + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -4 \times (\text{外} - \text{大})^4 + 4 \times (\text{外} + \text{大})^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 + \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right)^2 \right\} \times \text{小}^2 \\ &+ \left\{ 8 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})^4 - 8 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大}) \times (\text{外} - \text{大})^2 \right. \\ &- 8 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \left. \right\} \times \text{小} \\ &- 4 \times \text{外}^2 \times (\text{外} - \text{大})^4 + 4 \times \text{外}^2 \times (\text{外} - \text{大})^4 + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(\text{外}-\text{大})^2 \times \left\{ 4 \times (\text{外}+\text{大})^2 - 4 \times (\text{外}-\text{大})^2 \right\} + \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right)^2 \right] \times \text{小}^2 \\ & + 8 \times \text{外} \times (\text{外}-\text{大}) \\ & \times \left\{ (\text{外}-\text{大})^3 - (\text{外}+\text{大}) \times (\text{外}-\text{大})^2 - \text{大} \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \right\} \times \text{小} \\ & + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外}-\text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + \text{大}^2 \right) \times \left\{ 4 \times \text{外}^2 + 8 \times \text{外} \times \text{大} + 4 \times \text{大}^2 - 4 \times \text{外}^2 + 8 \times \text{外} \times \text{大} - 4 \times \text{大}^2 \right\} \right. \\ & \left. + \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right)^2 \right] \times \text{小}^2 + 8 \times \text{外} \times (\text{外}-\text{大}) \\ & \times \left\{ (\text{外}-\text{大}-\text{外}-\text{大}) \times (\text{外}-\text{大})^2 - \text{大} \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \right\} \times \text{小} \\ & + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外}-\text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + \text{大}^2 \right) \times (16 \times \text{外} \times \text{大}) + \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right)^2 \right] \times \text{小}^2 \\ & + 8 \times \text{外} \times (\text{外}-\text{大}) \\ & \times \left\{ -2 \times \text{大} \times (\text{外}-\text{大})^2 - \text{大} \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \right\} \times \text{小} \\ & + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外}-\text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(16 \times \text{外}^3 \times \text{大} - 32 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 + 16 \times \text{外} \times \text{大}^3 + 9 \times \text{外}^4 - 12 \times \text{外}^3 \times \text{大} + 22 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \right. \\ & \left. - 12 \times \text{外} \times \text{大}^3 + 9 \times \text{大}^4 \right) \times \text{小}^2 + 8 \times \text{外} \times (\text{外}-\text{大}) \\ & \times \left\{ -\text{大} \times \left(2 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{外} \times \text{大} + 2 \times \text{大}^2 \right) - \text{大} \right. \\ & \left. \times \left(3 \times \text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{大} + 3 \times \text{大}^2 \right) \right\} \times \text{小} + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外}-\text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(9 \times \text{外}^4 + 4 \times \text{外}^3 \times \text{大} - 10 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 + 4 \times \text{外} \times \text{大}^3 + 9 \times \text{大}^4 \right) \times \text{小}^2 \\ & + 8 \times \text{外} \times (\text{外}-\text{大}) \times \left\{ -\text{大} \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right) \right\} \times \text{小} \\ & + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外}-\text{大})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right) \times \text{小}^2 - 8 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \\
 & \quad \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right) \times \text{小} + 16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{小}^2 - 2 \times & \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)} \times \text{小} \\
 & + \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)} = 0 \quad \dots (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \text{小} - \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)} \right\}^2 \\
 & = \left\{ \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)} \right\}^2 \\
 & \quad - \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \text{小} - \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)} \right\}^2 \\
 & = \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2 \right)^2}{(\text{外} + \text{大})^4 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)^2} \\
 & \quad - \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{大}^2 \times (\text{外} - \text{大})^2 \times (\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)}{(\text{外} + \text{大})^4 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2 \right)^2}
 \end{aligned}$$

両辺の平方根をとって

$$\begin{aligned} \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2\right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \\ &= \pm \frac{16 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})^3}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \\ \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left\{ \left(5 \times \text{外}^2 - 6 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2\right) \pm 4 \times (\text{外} - \text{大})^2 \right\}}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \end{aligned}$$

複号のプラス側は

$$\begin{aligned} \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \\ \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})}{(\text{外} + \text{大})^2} \quad \dots (16) \end{aligned}$$

ここで、(16)は(5)と合わせると、中=小 となり 問題に合わない。

複号のマイナス側は

$$\begin{aligned} \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times \left(\text{外}^2 + 2 \times \text{外} \times \text{大} + \text{大}^2\right)}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \\ \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times (\text{外} + \text{大})^2}{(\text{外} + \text{大})^2 \times \left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)} \\ \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大})}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2} \quad \dots (17) \end{aligned}$$

(17)で、外は定数 小の極致を与える大を求めるため 大で微分する
(小を大で微分する)

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \times \text{外} \times (\text{外} - \text{大})}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2} + \frac{-4 \times \text{外} \times \text{大}}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2} \\ &= \frac{4 \times \text{外} \times \text{大} \times (\text{外} - \text{大}) \times (-14 \times \text{外} + 18 \times \text{大})}{\left(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2\right)^2} \end{aligned}$$

(小を大で微分する)

$$= \frac{4 \times \text{外}^2 - 8 \times \text{外} \times \text{大}}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2} - \frac{4 \times \text{外} \times (\text{外} \times \text{大} - \text{大}^2) \times (-14 \times \text{外} + 18 \times \text{大})}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$

(小を大で微分する)

$$= \frac{4 \times \text{外} \times (\text{外} - 2 \times \text{大}) \times (9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$
$$- \frac{4 \times \text{外} \times (\text{外} \times \text{大} - \text{大}^2) \times (-14 \times \text{外} + 18 \times \text{大})}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$

(小を大で微分する)

$$= \frac{4 \times \text{外}}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$
$$\times \left\{ 9 \times \text{外}^3 - 32 \times \text{外}^2 \times \text{大} + 37 \times \text{外} \times \text{大}^2 - 18 \times \text{大}^3 + 14 \times \text{外}^2 \times \text{大} - 32 \times \text{外} \times \text{大}^2 + 18 \times \text{大}^3 \right\}$$

(小を大で微分する)

$$= \frac{4 \times \text{外}}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2} \times \left\{ 9 \times \text{外}^3 - 18 \times \text{外}^2 \times \text{大} + 5 \times \text{外} \times \text{大}^2 \right\}$$

(小を大で微分する) =
$$\frac{4 \times \text{外}^2 \times (9 \times \text{外}^2 - 18 \times \text{外} \times \text{大} + 5 \times \text{大}^2)}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$

(小を大で微分する) =
$$\frac{4 \times \text{外}^2 \times (3 \times \text{外} - \text{大}) \times (3 \times \text{外} - 5 \times \text{大})}{(9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \text{大} + 9 \times \text{大}^2)^2}$$

したがって、小は、大が $3 \times \text{外} - \text{大} = 0$, $3 \times \text{外} - 5 \times \text{大} = 0$ で極値となる。
問題文から、大の範囲は、 $0 < \text{大} < \text{外}$ なので $3 \times \text{外} - \text{大} = 0$ は適さない。

$$\text{大} = \frac{3}{5} \times \text{外} \quad \dots (18)$$

(18) を (17) に入れて

$$\begin{aligned}
 \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \frac{3}{5} \times \text{外} \times \left(\text{外} - \frac{3}{5} \times \text{外} \right)}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \frac{3}{5} \times \text{外} + 9 \times \left(\frac{3}{5} \times \text{外} \right)^2} = \frac{4 \times 3 \times \text{外}^2 \times (5 \times \text{外} - 3 \times \text{外})}{225 \times \text{外}^2 - 210 \times \text{外}^2 + 81 \times \text{外}^2} \\
 &= \frac{12 \times \text{外}^2 \times 2 \times \text{外}}{96 \times \text{外}^2} = \frac{12 \times 2 \times \text{外}}{96} = \frac{12 \times \text{外}}{48} = \frac{\text{外}}{4} \quad \dots (19)
 \end{aligned}$$

ここで、(18)に $\text{大} = \frac{2}{5} \times \text{外}$ を入れると

$$\begin{aligned}
 \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \frac{2}{5} \times \text{外} \times \left(\text{外} - \frac{2}{5} \times \text{外} \right)}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \frac{2}{5} \times \text{外} + 9 \times \left(\frac{2}{5} \times \text{外} \right)^2} = \frac{4 \times 2 \times \text{外}^2 \times (5 \times \text{外} - 2 \times \text{外})}{225 \times \text{外}^2 - 140 \times \text{外}^2 + 36 \times \text{外}^2} \\
 &= \frac{8 \times \text{外}^2 \times 3 \times \text{外}}{121 \times \text{外}^2} = \frac{8 \times 3 \times \text{外}}{121} = \frac{24 \times \text{外}}{121} = \frac{\text{外}}{5 \frac{1}{24}}
 \end{aligned}$$

ここで、(18)に $\text{大} = \frac{4}{5} \times \text{外}$ を入れると

$$\begin{aligned}
 \text{小} &= \frac{4 \times \text{外} \times \frac{4}{5} \times \text{外} \times \left(\text{外} - \frac{4}{5} \times \text{外} \right)}{9 \times \text{外}^2 - 14 \times \text{外} \times \frac{4}{5} \times \text{外} + 9 \times \left(\frac{4}{5} \times \text{外} \right)^2} = \frac{4 \times 4 \times \text{外}^2 \times (5 \times \text{外} - 4 \times \text{外})}{225 \times \text{外}^2 - 280 \times \text{外}^2 + 144 \times \text{外}^2} \\
 &= \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{外}}{89 \times \text{外}^2} = \frac{16 \times \text{外}}{89} = \frac{\text{外}}{5 \frac{5}{16}}
 \end{aligned}$$

したがって、 $\text{大} = \frac{3}{5} \times \text{外}$ のとき 小 は最大値 $\frac{\text{外}}{4}$ となる

(19)に $\text{外} = 4$ を入れて

$$\text{小} = \frac{4}{4} = 1$$

答え 小円の直径の最大は 1寸