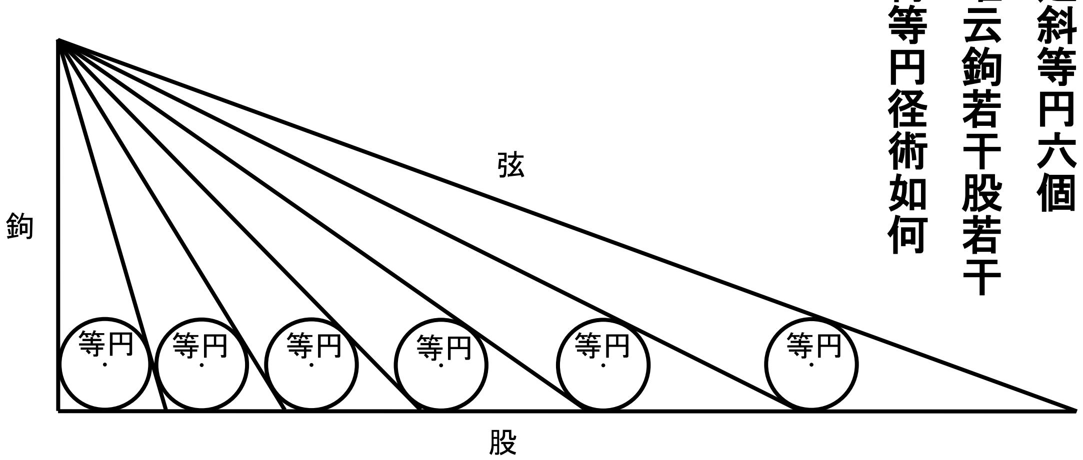
群馬の算額　１８－１改　八幡宮　　文化７年



今有如図鉤股内容隔
逐斜等円六個
唯云鉤若干股若干
得等円径術如何

〔問題〕（問題の内容を変えています。）

図のように、直角三角形の直角でない１つの頂点から、その対辺上の５点を線分で結んでできる、６個の三角形の内接円の直径がすべて等しい。直角三角形の直角をはさむ２辺の長さが、（鉤）３２寸，（股）１０２３．７５寸のとき、内接円（等円）の直径は、何寸か。

（元は計算式を求める問題でしたが、数値を求める問題に変えました。）

〔解法例〕

図２のように作画する。

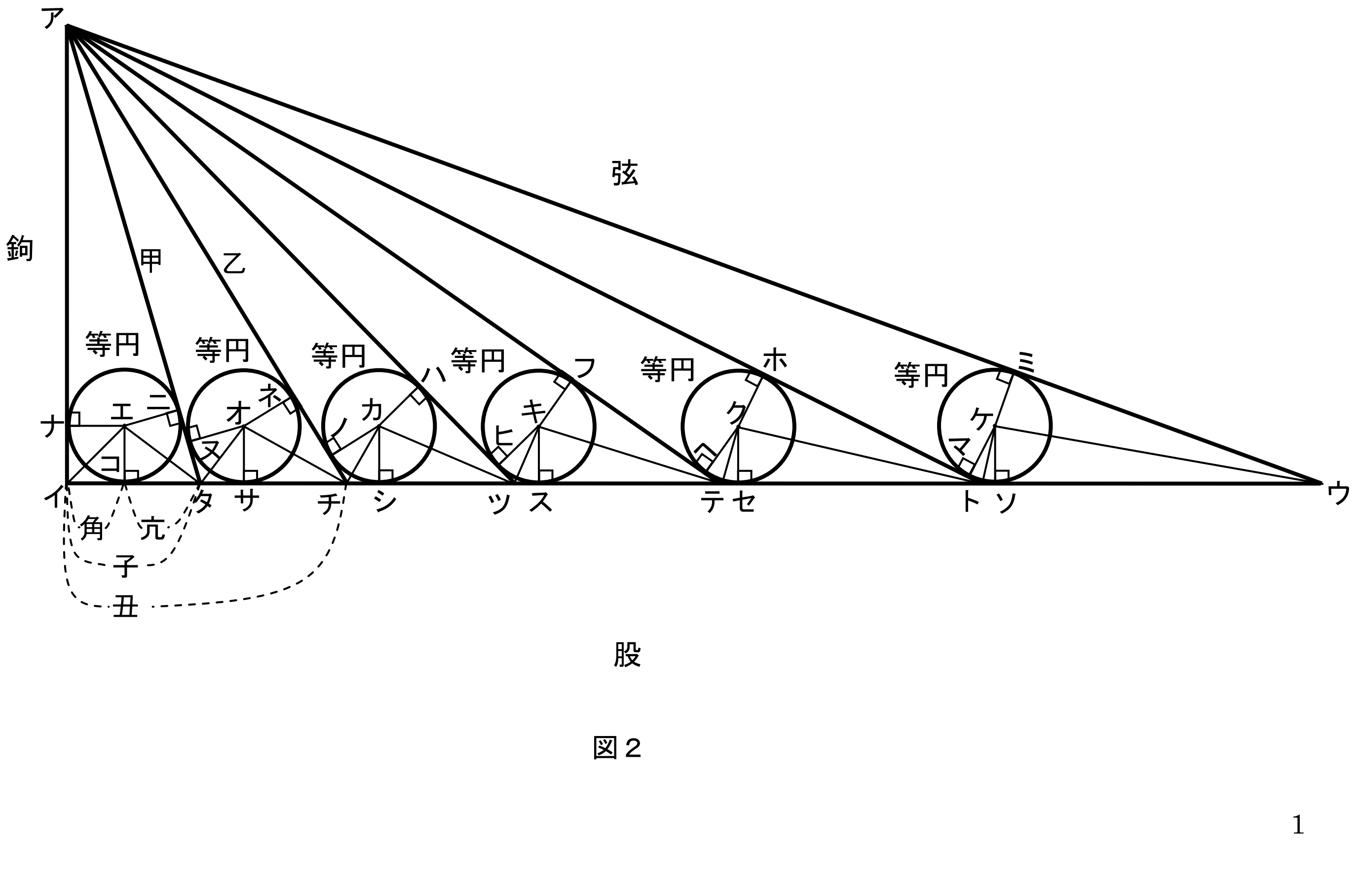


図２

直角三角形をアイウとする。６個の等円の中心を左から順に　エ，オ，カ，キ，ク，ケとする。
等円の中心から、線分イウへ下した垂線の足を順に　コ，サ，シ，ス，セ，ソとする。
アを通り、最も左の等円と次の等円に接する線が線分イウと交わる点を　タとする。
同様にアを通り、左から２つ目の等円と左から３つ目の等円に接する線が線分イウと交わる点をチ，同様に順に　ツ，テ，トとする。
エから、線分アイへ下した垂線の足を　ナ，エから、線分アタへ下した垂線の足を　ニ，
オから、線分アタへ下した垂線の足を　ヌ，オから、線分アチへ下した垂線の足を　ネ，
カから、線分アチへ下した垂線の足を　ノ，カから、線分アツへ下した垂線の足を　ハ，
キから、線分アツへ下した垂線の足を　ヒ，キから、線分アテへ下した垂線の足を　フ，
クから、線分アテへ下した垂線の足を　ヘ，クから、線分アトへ下した垂線の足を　ホ，
ケから、線分アトへ下した垂線の足を　マ，ケから、線分アウへ下した垂線の足を　ミとする。

線分イコの長さを　角（かく），線分コタの長さを　亢（こう），線分アナの長さを　氐（てい），線分タサの長さを　房（ぼう），
線分サチの長さを　心（しん），線分アヌの長さを　尾（び），線分チシの長さを　箕（き），線分シツの長さを　斗（と），
線分アノの長さを　牛（ぎゅう），線分ツスの長さを　女（じょ），線分ステの長さを　虚（きょ），線分アヒの長さを　危（き），
線分テセの長さを　室（しつ），線分セトの長さを　壁（へき），線分アヘの長さを　奎（けい），線分トソの長さを　婁（ろう），
線分ソウの長さを　胃（い），線分アマの長さを　昴（ぼう）とする。
線分イタの長さを　子，線分イチの長さを　丑，線分イツの長さを　寅，線分イテの長さを　卯，
線分イトの長さを　辰，線分イウの長さを　巳とする。巳＝股である。
線分アタの長さを　甲，線分アチの長さを　乙，線分アツの長さを　丙，線分アテの長さを　丁，
線分アトの長さを　戊，線分アウの長さを　己とする。己＝弦である。

直角三角形エコタと直角三角形エニタは、斜辺を共有する直角三角形なので、合同。
直角三角形タヌオと直角三角形タサオは、斜辺を共有する直角三角形なので、合同。
図２から、　角コタエ＋角ニタエ＋角ヌタオ＋角サタオ ＝ ２直角　で
直角三角形の合同から、　角コタエ ＝ 角ニタエ　，角ヌタオ ＝ 角サタオ　　なので
角コタエ＋角サタオ ＝ 直角　　　　　・・・（１）
直角三角形エコタの内角の和は２直角なので、
角コエタ＋角コタエ ＝ 直角　　　　　・・・（２）
（１）、（２）から　　角コエタ ＝ 角サタオ
直角以外の１つの角の大きさが等しいので、直角三角形エコタと直角三角形タサオは相似。
$(エコ):(コタ)=(タサ):(サオ)$
$(コタ)\times(タサ)=(エコ)\times(サオ)$
ここで、$(コタ)=亢$，$(タサ)=房$，$(エコ)=(サオ)=\dfrac{等}{2}$　なので

$$亢 \times 房 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 \quad ・・・(1)$$

$$心 \times 箕 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 \quad ・・・(2)$$

$$斗 \times 女 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 \quad ・・・(3)$$

$$虚 \times 室 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 \quad ・・・(4)$$

$$壁 \times 婁 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 \quad ・・・(5)$$

ここで、図２から　三角形の辺と内接円の関係から　房　を表す式を考える。
三角形アタチの三辺は次のように表せる。

$甲 = 尾 + 房$ ・・・(6)

$乙 = 尾 + 心$ ・・・(7)

$丑 = 子 + 房 + 心$ ・・・(8)

（６)、(７)、(８）から

$甲 - 乙 + 丑 = 尾 + 房 - 尾 - 心 + 子 + 房 + 心 = 2 \times 房 + 子$

$2 \times 房 = 甲 - 子 - 乙 + 丑$

$$房 = \frac{甲 - 子 - 乙 + 丑}{2} \quad ・・・(9)$$

ここで、$甲 = 氐 + 亢$，$子 = 角 + 亢$，$氐 + 角 = 鉤$，$角 = \frac{等}{2}$　なので

$甲 - 子 = 氐 + 亢 - 角 - 亢 = 氐 + 角 - 2 \times 角 = 鉤 - 等$ ・・・(10)

（９）に（１０）を代入して

$$房 = \frac{鉤 - 等 - 乙 + 丑}{2} \quad ・・・(11)$$

同様に　三角形の辺と内接円の関係から　箕　を表す式を考える。
三角形アチツの三辺は次のように表せる。

$乙 = 牛 + 箕$ ・・・(12)

$丙 = 牛 + 斗$ ・・・(13)

$寅 = 丑 + 箕 + 斗$ ・・・(14)

（１２)、(１３)、(１４）から

$乙 - 丙 + 寅 = 牛 + 箕 - 牛 - 斗 + 丑 + 箕 + 斗 = 2 \times 箕 + 丑$

$２\times 箕 = 乙 - 丑 - 丙 + 寅$

$$箕 = \frac{乙 - 丑 - 丙 + 寅}{2} \quad ・・・（１５）$$

同様にして　三角形アツテの３辺と内接円の関係から　女　を表す式は

$$女 = \frac{丙 - 寅 - 丁 + 卯}{2} \quad ・・・（１６）$$

同様にして　三角形アテトの３辺と内接円の関係から　室　を表す式は

$$室 = \frac{丁 - 卯 - 戊 + 辰}{2} \quad ・・・（１７）$$

同様にして　三角形アトウの３辺と内接円の関係から　婁　を表す式を考える。

$$婁 = \frac{戊 - 辰 - 己 + 巳}{2} \quad ・・・（１８）$$

三角形アイタ　の面積を２通りの方法で計算する。

$$(三角形アイタの面積) = \frac{1}{2} \times (イタ) \times (アイ)$$

ここで、$(イタ) = (イコ) + (コタ) = 角 + 亢 = \frac{等}{2} + 亢,$

$(アイ) = (アナ) + (ナイ) = 氐 + 角 = 氐 + \frac{等}{2}$　なので

$$(三角形アイタの面積) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{等}{2} + 亢\right) \times \left(氐 + \frac{等}{2}\right) \quad ・・・（１９）$$

$$(三角形アイタの面積) = \frac{1}{2} \times \{(アイ) \times (エナ) + (アタ) \times (エニ) + (イタ) \times (エコ)\}$$

ここで、$(アイ) = 氐 + \frac{等}{2},\ (アタ) = (アニ) + (ニタ) = 氐 + 亢,\ (イタ) = \frac{等}{2} + 亢,$

$(エナ) = (エニ) = (エコ) = \frac{等}{2}$　なので

$$(三角形アイタの面積) = \frac{1}{2} \times \left\{氐 + \frac{等}{2} + 氐 + 亢 + \frac{等}{2} + 亢\right\} \times \frac{等}{2} \quad ・・・（２０）$$

（１９），（２０）から

$$\left(\frac{等}{2} + 亢\right) \times \left(氐 + \frac{等}{2}\right) = \left\{２ \times \left(氐 + \frac{等}{2}\right) + ２ \times 亢\right\} \times \frac{等}{2}$$

ここで、$氐 + \frac{等}{2} = (アイ) = 鉤$　とも表せるので

$$\left(\frac{等}{2} + 亢\right) \times 鉤 = (２ \times 鉤 + ２ \times 亢) \times \frac{等}{2}$$

$$\frac{等}{2}\times 鉤 + 亢 \times 鉤 = 等 \times 鉤 + 等 \times 亢$$

$$亢 \times (鉤 - 等) = \frac{等}{2}\times 鉤$$

$$亢 = \frac{等 \times 鉤}{2 \times (鉤 - 等)} \quad ・・・（２１）$$

同様に　三角形アタチ　の面積を２通りの方法で計算する。

$$(三角形アタチの面積) = \frac{1}{2}\times(タチ)\times(アイ)$$

ここで、$(タチ) = (タサ) + (サチ) = 房 + 心,\ (アイ) = 鉤$　なので

$$(三角形アタチの面積) = \frac{1}{2}\times(房 + 心)\times 鉤 \quad ・・・（２２）$$

$$(三角形アタチの面積) = \frac{1}{2}\times\{(アタ)\times(オヌ) + (アチ)\times(オネ) + (タチ)\times(オサ)\}$$

ここで、$(アタ) = (アヌ) + (ヌタ) = 尾 + 房,\ (アチ) = (アネ) + (ネチ) = 尾 + 心,$

$(タチ) = 房 + 心,\ (オヌ) = (オネ) = (オサ) = \frac{等}{2}$　なので

$$(三角形アタチの面積) = \frac{1}{2}\times(尾 + 房 + 尾 + 心 + 房 + 心)\times\frac{等}{2}$$

$$(三角形アタチの面積) = \frac{1}{2}\times(尾 + 房 + 心)\times 等 \quad ・・・（２３）$$

（２２），（２３）から

$$(房 + 心)\times 鉤 = (尾 + 房 + 心)\times 等 \quad ・・・(２４)$$

ここで、$尾 + 房 = 甲$　なので

$$房 \times 鉤 + 心 \times 鉤 = 甲 \times 等 + 心 \times 等$$

$$心 \times 鉤 - 心 \times 等 = 甲 \times 等 - 房 \times 鉤$$

$$心 \times (鉤 - 等) = 甲 \times 等 - 房 \times 鉤$$

$$心 = \frac{甲 \times 等 - 房 \times 鉤}{鉤 - 等} \quad ・・・（２５）$$

同様にして

$$斗 = \frac{乙 \times 等 - 箕 \times 鉤}{鉤 - 等} \quad ・・・（２６）$$

$$虚 = \frac{丙 \times 等 - 女 \times 鉤}{鉤 - 等} \quad ・・・（２７）$$

$$壁 = \frac{丁 \times 等 - 室 \times 鉤}{鉤 - 等} \quad ・・・（２８）$$

$$胃 = \frac{戊 \times 等 - 婁 \times 鉤}{鉤 - 等} \quad ・・・（２９）$$

鉤、甲、乙、丙、丁、戊、己　の関係を整理しておくと、

$甲 = 鉤 - 角 + 亢$ ・・・（３０）

$乙 = 甲 - 房 + 心$ ・・・（３１）

$丙 = 乙 - 箕 + 斗$ ・・・（３２）

$丁 = 丙 - 女 + 虚$ ・・・（３３）

$戊 = 丁 - 室 + 壁$ ・・・（３４）

$己 = 戊 - 婁 + 胃$ ・・・（３５）

（１）に（１１），（２１）を代入して

$$\frac{等 \times 鉤}{2 \times (鉤 - 等)} \times \frac{鉤 - 等 - 乙 + 丑}{2} = \left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$等 \times 鉤 \times (鉤 - 等 - 乙 + 丑) = 等^2 \times (鉤 - 等)$$

等　は　０　でないので、両辺を　等　で割って

$$鉤 \times (鉤 - 等 - 乙 + 丑) = 等 \times (鉤 - 等)$$

$$鉤 \times (鉤 - 等) - 鉤 \times (乙 - 丑) = 等 \times (鉤 - 等)$$

$$鉤 \times (鉤 - 等) - 等 \times (鉤 - 等) = 鉤 \times (乙 - 丑)$$

$$(鉤 - 等) \times (鉤 - 等) = 鉤 \times (乙 - 丑)$$

$$(鉤 - 等)^2 = 鉤 \times (乙 - 丑)$$ ・・・（３６）

両辺の平方根をとって

$$鉤 - 等 = \pm\sqrt{鉤 \times (乙 - 丑)}$$

鉤＞等　であるため　複号のプラス側を採って

$$鉤 - 等 = \sqrt{鉤 \times (乙 - 丑)}$$

$$等 = 鉤 - \sqrt{鉤 \times (乙 - 丑)} = 鉤 - 鉤 \times \sqrt{\frac{乙 - 丑}{鉤}} = 鉤 \times \left(1 - \sqrt{\frac{乙 - 丑}{鉤}}\right)$$ ・・・（３７）

（３６）から

$$乙 - 丑 = \frac{(鉤 - 等)^2}{鉤}$$ ・・・（３８）

また、（１１）に（３８）を代入して

$$房 = \frac{鉤 - 等 - \frac{(鉤 - 等)^2}{鉤}}{2} = \frac{(鉤 - 等) \times 鉤 - (鉤 - 等)^2}{2 \times 鉤} = \frac{(鉤 - 等) \times (鉤 - 鉤 + 等)}{2 \times 鉤}$$

$$房=\frac{(鉤-等)\times 等}{2\times 鉤} \qquad \cdots(39)$$

（２）に（１５），（２５）を代入して

$$\frac{甲\times 等-房\times 鉤}{鉤-等}\times\frac{乙-丑-丙+寅}{2}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$2\times(甲\times 等-房\times 鉤)\times(乙-丑-丙+寅)=等^2\times(鉤-等) \qquad \cdots(40)$$

ここで、（３０）から甲＝鉤－角＋亢，角$=\frac{等}{2}$，（２１）から亢$=\frac{等\times 鉤}{2\times(鉤-等)}$　なので

$$甲=鉤-\frac{等}{2}+\frac{等\times 鉤}{2\times(鉤-等)}=\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤-(鉤-等)\times 等+等\times 鉤}{2\times(鉤-等)}$$

$$甲=\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤+等^2}{2\times(鉤-等)} \qquad \cdots(41)$$

（４０）に（４１），（３９），（３８）　を代入して

$$2\times\left[\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤+等^2}{2\times(鉤-等)}\times 等-\frac{(鉤-等)\times 等}{2\times 鉤}\times 鉤\right]\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}$$

$$=等^2\times(鉤-等)$$

$$\left\{\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤+等^2}{鉤-等}\times 等-(鉤-等)\times 等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$等\times\left\{\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤+等^2}{鉤-等}-(鉤-等)\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$\left\{\frac{2\times(鉤-等)\times 鉤+等^2-(鉤-等)^2}{鉤-等}\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等\times(鉤-等)$$

$$\left\{(鉤-等)\times(2\times 鉤-鉤+等)+等^2\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等\times(鉤-等)^2$$

$$\left\{(鉤-等)\times(鉤+等)+等^2\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等\times(鉤-等)^2$$

$$\left\{鉤^2-等^2+等^2\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等\times(鉤-等)^2$$

$$鉤^2\times\left\{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-丙+寅\right\}=等\times(鉤-等)^2$$

$$\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-(丙-寅)=\frac{等\times(鉤-等)^2}{鉤^2}$$

$$丙-寅=\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-\frac{等\times(鉤-等)^2}{鉤^2}=\frac{(鉤-等)^2\times(鉤-等)}{鉤^2}$$

$$丙-寅=\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}$$ ・・・（４２）

$$(鉤-等)^3=鉤^2\times(丙-寅)$$ ・・・（４３）

$$(鉤-等)^3=鉤^3\times\frac{丙-寅}{鉤}$$

両辺の立方根をとって、（実数の範囲のみを考える）

$$鉤-等=鉤\times\sqrt[3]{\frac{丙-寅}{鉤}}$$

$$等=鉤-鉤\times\sqrt[3]{\frac{丙-寅}{鉤}}=鉤\times\left(1-\sqrt[3]{\frac{丙-寅}{鉤}}\right)$$ ・・・（４４）

また、（１５）に（３８），（４２）を代入して

$$箕=\frac{\frac{(鉤-等)^2}{鉤}-\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}}{2}=\frac{(鉤-等)^2\times鉤-(鉤-等)^3}{2\times鉤^2}=\frac{(鉤-等)^2\times(鉤-鉤+等)}{2\times鉤^2}$$

$$箕=\frac{(鉤-等)^2\times等}{2\times鉤^2}$$ ・・・（４５）

（２）に（４５）を入れて

$$心\times\frac{(鉤-等)^2\times等}{2\times鉤^2}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$心=\frac{等^2}{4}\times\frac{2\times鉤^2}{(鉤-等)^2\times等}=\frac{鉤^2\times等}{2\times(鉤-等)^2}$$ ・・・（４６）

（３）に（１６），（２６）を代入して

$$\frac{乙\times等-箕\times鉤}{鉤-等}\times\frac{丙-寅-丁+卯}{2}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$2\times(乙\times等-箕\times鉤)\times(丙-寅-丁+卯)=等^2\times(鉤-等)$$ ・・・（４７）

（３１）に（４１），（３９），（４６）を代入して

$$乙=\frac{2\times(鉤-等)\times鉤+等^2}{2\times(鉤-等)}-\frac{(鉤-等)\times等}{2\times鉤}+\frac{鉤^2\times等}{2\times(鉤-等)^2}$$

$$乙=\frac{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times等+鉤^3\times等}{2\times鉤\times(鉤-等)^2}$$ ・・・（４８）

（４７）に（４８），（４５），（４２）　を代入して

$$2\times\left\{\frac{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times等+鉤^3\times等}{2\times鉤\times(鉤-等)^2}\times等\right.$$

$$\left.-\frac{(鉤-等)^2\times等}{2\times鉤^2}\times鉤\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}-丁+卯\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$等\times\left\{\frac{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times等+鉤^3\times等-(鉤-等)^4}{鉤\times(鉤-等)^2}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}-丁+卯\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times等+鉤^3\times等-(鉤-等)^4\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^3$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times(等+鉤-等)+鉤^3\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^3$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^{2}\times鉤^{2}+(鉤-等)\times鉤\times等^{2}-(鉤-等)^{3}\times鉤+鉤^{3}\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\left\{(鉤-等)^{2}\times\left(2\times鉤^{2}-鉤^{2}+鉤\times等\right)+(鉤-等)\times鉤\times等^{2}+鉤^{3}\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\left\{(鉤-等)^{2}\times鉤\times(鉤+等)+(鉤-等)\times鉤\times等^{2}+鉤^{3}\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}$$

$$=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤\times\left(鉤^{2}-等^{2}+等^{2}\right)+鉤^{3}\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}$$

$$=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤\times鉤^{2}+鉤^{3}\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\left\{鉤^{3}\times(鉤-等+等)\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$鉤^{4}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-丁+卯\right\}=等\times鉤\times(鉤-等)^{3}$$

$$\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{2}}-(丁-卯)=等\times\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{3}}$$

$$丁-卯=\frac{(鉤-等)^{3}\times}{鉤^{2}}-等\times\frac{(鉤-等)^{3}}{鉤^{3}}=\frac{(鉤-等)^{3}\times鉤-等\times(鉤-等)^{3}}{鉤^{3}}$$

$$丁-卯=\frac{(鉤-等)^{4}}{鉤^{3}}$$ ・・・（４９）

また、（１６）に（４２），（４９）を代入して

$$女=\frac{\frac{(鉤-等)^3}{鉤^2}-\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}}{2}=\frac{(鉤-等)^3\times鉤-(鉤-等)^4}{2\times鉤^3}=\frac{(鉤-等)^3\times(鉤-鉤+等)}{2\times鉤^3}$$

$$女=\frac{(鉤-等)^3\times等}{2\times鉤^3}$$ ・・・（５０）

（３）に（５０）を入れて

$$斗\times\frac{(鉤-等)^3\times等}{2\times鉤^3}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$斗=\frac{等^2}{4}\times\frac{2\times鉤^3}{(鉤-等)^3\times等}=\frac{鉤^3\times等}{2\times(鉤-等)^3}$$ ・・・（５１）

（４）に（２７），（１７）を代入して

$$\frac{丙\times等-女\times鉤}{鉤-等}\times\frac{丁-卯-戊+辰}{2}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$2\times(丙\times等-女\times鉤)\times(丁-卯-戊+辰)=等^2\times(鉤-等)$$ ・・・（５２）

（３２）に（４８），（４５），（５１）を代入して

$$丙=\frac{2\times(鉤-等)^2\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤\times等^2-(鉤-等)^3\times等+鉤^3\times等}{2\times鉤\times(鉤-等)^2}-\frac{(鉤-等)^2\times等}{2\times鉤^2}$$

$$+\frac{鉤^3\times等}{2\times(鉤-等)^3}$$

$$丙=\frac{2\times(鉤-等)^3\times鉤^3+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2-(鉤-等)^4\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^4\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}$$

$$-\frac{(鉤-等)^5\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}+\frac{鉤^5\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}$$

$$丙=\frac{2\times(鉤-等)^3\times鉤^3+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2-(鉤-等)^4\times等\times鉤+(鉤-等)\times鉤^4\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}$$

$$+\frac{-(鉤-等)^5\times等+鉤^5\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}$$ ・・・（５３）

（５２）に（５３），（５０），（４９）　を代入して

$$2\times\left[\left\{\frac{2\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{鉤}^{3}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{2}\times\text{鉤}^{2}\times\text{等}^{2}-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}\times\text{等}\times\text{鉤}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)\times\text{鉤}^{4}\times\text{等}}{2\times\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{5}\times\text{等}+\text{鉤}^{5}\times\text{等}}{2\times\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right\}\times\text{等}-\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{等}}{2\times\text{鉤}^{3}}\times\text{鉤}\right]$$

$$\times\left\{\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}}{\text{鉤}^{3}}-\text{戊}+\text{辰}\right\}=\text{等}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)$$

$$\text{等}\times\left\{\frac{2\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{鉤}^{3}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{2}\times\text{鉤}^{2}\times\text{等}^{2}-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}\times\text{等}\times\text{鉤}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)\times\text{鉤}^{4}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right.$$

$$\left.+\frac{-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{5}\times\text{等}+\text{鉤}^{5}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}-\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{6}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right\}\times\left\{\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}}{\text{鉤}^{3}}-\text{戊}+\text{辰}\right\}$$

$$=\text{等}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)$$

$$\text{等}\times\left\{\frac{2\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{鉤}^{3}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{2}\times\text{鉤}^{2}\times\text{等}^{2}-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}\times\text{等}\times\text{鉤}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)\times\text{鉤}^{4}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right.$$

$$\left.+\frac{-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{5}\times\left(\text{等}+\text{鉤}-\text{等}\right)+\text{鉤}^{5}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right\}\times\left\{\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}}{\text{鉤}^{3}}-\text{戊}+\text{辰}\right\}$$

$$=\text{等}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)$$

$$\text{等}\times\left\{\frac{2\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{鉤}^{3}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{2}\times\text{鉤}^{2}\times\text{等}^{2}-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}\times\text{鉤}\times\text{等}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)\times\text{鉤}^{4}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right.$$

$$\left.+\frac{-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{5}\times\text{鉤}+\text{鉤}^{5}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right\}\times\left\{\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}}{\text{鉤}^{3}}-\text{戊}+\text{辰}\right\}=\text{等}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)$$

$$\text{等}\times\left\{\frac{2\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}\times\text{鉤}^{3}+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{2}\times\text{鉤}^{2}\times\text{等}^{2}-\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}\times\text{鉤}\times\left(\text{等}+\text{鉤}-\text{等}\right)+\left(\text{鉤}-\text{等}\right)\times\text{鉤}^{4}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{鉤}^{5}\times\text{等}}{\text{鉤}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{3}}\right\}\times\left\{\frac{\left(\text{鉤}-\text{等}\right)^{4}}{\text{鉤}^{3}}-\text{戊}+\text{辰}\right\}=\text{等}^{2}\times\left(\text{鉤}-\text{等}\right)$$

$$等\times\left\{\frac{2\times(鉤-等)^3\times鉤^3+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2-(鉤-等)^4\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤^4\times等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{鉤^5\times等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$等\times\left\{\frac{(鉤-等)^3\times鉤^2\times(2\times鉤-鉤+等)+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2+(鉤-等)\times鉤^4\times等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{鉤^5\times等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$\frac{等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\times\left\{(鉤-等)^2\times鉤^2\times\left(鉤^2-等^2\right)+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2+(鉤-等)\times鉤^4\times等+鉤^5\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$\frac{等}{鉤^2\times(鉤-等)^3}\times\left\{(鉤-等)^2\times鉤^2\times\left(鉤^2-等^2+等^2\right)+(鉤-等)\times鉤^4\times等+鉤^5\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等^2\times(鉤-等)$$

$$\left\{(鉤-等)^2\times鉤^4+(鉤-等)\times鉤^4\times等+鉤^5\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}$$

$$=等\times鉤^2\times(鉤-等)^4$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤^4\times(鉤-等+等)+鉤^5\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等\times鉤^2\times(鉤-等)^4$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤^5+鉤^5\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等\times鉤^2\times(鉤-等)^4$$

$$\left\{(鉤-等+等)\times鉤^5\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等\times鉤^2\times(鉤-等)^4$$

$$鉤^6\times\left\{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-戊+辰\right\}=等\times鉤^2\times(鉤-等)^4$$

$$戊-辰=\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-等\times\frac{(鉤-等)^4}{鉤^4}=\frac{(鉤-等)^4\times鉤-等\times(鉤-等)^4}{鉤^4}$$

$$戊-辰=\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4} \qquad ・・・(５４)$$

また、（１７）に（４９），（５４）を代入して

$$室=\frac{\frac{(鉤-等)^4}{鉤^3}-\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}}{2}=\frac{(鉤-等)^4\times鉤-(鉤-等)^5}{2\times鉤^4}=\frac{(鉤-等)^4\times(鉤-鉤+等)}{2\times鉤^4}$$

$$室=\frac{(鉤-等)^4\times等}{2\times鉤^4} \qquad ・・・(５５)$$

（４）に（５５）を入れて

$$虚\times\frac{(鉤-等)^4\times等}{2\times鉤^4}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$虚=\frac{等^2}{4}\times\frac{2\times鉤^4}{(鉤-等)^4\times等}=\frac{鉤^4\times等}{2\times(鉤-等)^4} \qquad ・・・(５６)$$

（５）に（２８），（）を代入して

$$\frac{丁\times等-室\times鉤}{鉤-等}\times\frac{戊-辰-己+巳}{2}=\left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$2\times(丁\times等-室\times鉤)\times(戊-辰-己+巳)=等^2\times(鉤-等) \qquad ・・・(５７)$$

（３３）に（５３），（５０），（５６）を代入して

$$丁=\left\{\frac{2\times(鉤-等)^3\times鉤^3+(鉤-等)^2\times鉤^2\times等^2-(鉤-等)^4\times等\times鉤+(鉤-等)\times鉤^4\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{-(鉤-等)^5\times等+鉤^5\times等}{2\times鉤^2\times(鉤-等)^3}\right\}-\frac{(鉤-等)^3\times等}{2\times鉤^3}+\frac{鉤^4\times等}{2\times(鉤-等)^4}$$

$$丁=\frac{2\times(鉤-等)^{4}\times鉤^{4}+(鉤-等)^{3}\times鉤^{3}\times等^{2}-(鉤-等)^{5}\times等\times鉤^{2}+(鉤-等)^{2}\times鉤^{5}\times等}{2\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{4}}$$

$$+\frac{-(鉤-等)^{6}\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^{6}\times等-(鉤-等)^{7}\times等+鉤^{7}\times等}{2\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{4}}\quad\cdot(58)$$

（５７）に（５８），（５５），（５４）を代入して

$$2\times\left\{\frac{2\times(鉤-等)^{4}\times鉤^{4}+(鉤-等)^{3}\times鉤^{3}\times等^{2}-(鉤-等)^{5}\times等\times鉤^{2}+(鉤-等)^{2}\times鉤^{5}\times等}{2\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{4}}\right.$$

$$+\frac{-(鉤-等)^{6}\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^{6}\times等-(鉤-等)^{7}\times等+鉤^{7}\times等}{2\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{4}}\times等$$

$$\left.-\frac{(鉤-等)^{4}\times等}{2\times鉤^{4}}\times鉤\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^{5}}{鉤^{4}}-己+巳\right\}=等^{2}\times(鉤-等)$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^{4}\times鉤^{4}+(鉤-等)^{3}\times鉤^{3}\times等^{2}-(鉤-等)^{5}\times等\times鉤^{2}+(鉤-等)^{2}\times鉤^{5}\times等\right.$$

$$\left.-(鉤-等)^{6}\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^{6}\times等-(鉤-等)^{7}\times等+鉤^{7}\times等-(鉤-等)^{8}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^{5}}{鉤^{4}}-己+巳\right\}\times\frac{等}{鉤^{3}\times(鉤-等)^{4}}=等^{2}\times(鉤-等)$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^{4}\times鉤^{4}+(鉤-等)^{3}\times鉤^{3}\times等^{2}-(鉤-等)^{5}\times等\times鉤^{2}+(鉤-等)^{2}\times鉤^{5}\times等\right.$$

$$\left.-(鉤-等)^{6}\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^{6}\times等-(鉤-等)^{7}\times(等+鉤-等)+鉤^{7}\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^{5}}{鉤^{4}}-己+巳\right\}=等\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{5}$$

$$\left\{2\times(鉤-等)^{4}\times鉤^{4}+(鉤-等)^{3}\times鉤^{3}\times等^{2}-(鉤-等)^{5}\times等\times鉤^{2}+(鉤-等)^{2}\times鉤^{5}\times等\right.$$

$$\left.-(鉤-等)^{6}\times鉤\times等+(鉤-等)\times鉤^{6}\times等-(鉤-等)^{7}\times鉤+鉤^{7}\times等\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^{5}}{鉤^{4}}-己+巳\right\}=等\times鉤^{3}\times(鉤-等)^{5}$$

$$\Big\{2\times(鉤-等)^4\times鉤^4+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2-(鉤-等)^5\times等\times鉤^2+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等$$

$$-(鉤-等)^6\times鉤\times(等+鉤-等)+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\Big\}$$

$$\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{2\times(鉤-等)^4\times鉤^4+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2-(鉤-等)^5\times等\times鉤^2+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等$$

$$-(鉤-等)^6\times鉤^2+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}$$

$$=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{2\times(鉤-等)^4\times鉤^4+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2-(鉤-等)^5\times鉤^2\times(等+鉤-等)+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等$$

$$+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{2\times(鉤-等)^4\times鉤^4+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2-(鉤-等)^5\times鉤^2\times(等+鉤-等)+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等$$

$$+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{2\times(鉤-等)^4\times鉤^4+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2-(鉤-等)^5\times鉤^3+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等$$

$$+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{(鉤-等)^4\times鉤^3\times(2\times鉤-鉤+等)+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等+(鉤-等)\times鉤^6\times等$$

$$+鉤^7\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\Big\{(鉤-等)^4\times鉤^3\times(鉤+等)+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7$$

$$\times等\Big\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)^3\times鉤^3\times\left(鉤^2-等^2\right)+(鉤-等)^3\times鉤^3\times等^2+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)^3\times鉤^3\times\left(鉤^2-等^2+等^2\right)+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)^3\times鉤^5+(鉤-等)^2\times鉤^5\times等+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)^2\times鉤^5\times(鉤-等+等)+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)^2\times鉤^6+(鉤-等)\times鉤^6\times等+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤^6\times(鉤-等+等)+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等)\times鉤^7+鉤^7\times等\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$\left\{(鉤-等+等)\times鉤^7\right\}\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$鉤^8\times\left\{\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-己+巳\right\}=等\times鉤^3\times(鉤-等)^5$$

$$己-巳=\frac{(鉤-等)^5}{鉤^4}-\frac{等\times(鉤-等)^5}{鉤^5}=\frac{(鉤-等)^5\times鉤-等\times(鉤-等)^5}{鉤^5}$$

$$己-巳=\frac{(鉤-等)^6}{鉤^5} \quad \cdots(59)$$

$$(鉤-等)^6=鉤^5\times(己-巳)$$

両辺の６乗根をとる。（実数の範囲内とする。）

$$鉤-等=\pm鉤\times\sqrt[6]{\frac{己-巳}{鉤}}$$

ここで、鉤＞等　なので　複号はプラス側を採る。

$$鉤-等=鉤\times\sqrt[6]{\frac{己-巳}{鉤}}$$

$$等=鉤-鉤\times\sqrt[6]{\frac{己-巳}{鉤}}=鉤\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{己-巳}{鉤}}\right) \quad \cdots(60)$$

定義より、己＝弦，巳＝股，直角三角形アイウで　三平方の定理から　$弦=\sqrt{鉤^2+股^2}$　なので

$$等=鉤\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{弦-股}{鉤}}\right)=鉤\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{\sqrt{鉤^2+股^2}-股}{鉤}}\right)$$

鉤＝３２，股＝１０２３．７５　を　入れて

$$等=32\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{\sqrt{32^2+(1023.75)^2}-1023.75}{32}}\right)$$

$$=32\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{\sqrt{\left(\frac{128}{4}\right)^2+\left(\frac{4095}{4}\right)^2}-1023.75}{32}}\right)$$

$$=32\times\left(1-\sqrt[6]{\frac{\sqrt{\frac{16384+16769025}{4^2}}-1023.75}{32}}\right)$$

$$等 = 32 \times \left(1 - \sqrt[6]{\frac{\frac{\sqrt{16785409}}{4} - 1023.75}{32}} \right)$$

$$= 32 \times \left(1 - \sqrt[6]{\frac{\frac{4097}{4} - 1023.75}{32}} \right)$$

$$= 32 \times \left(1 - \sqrt[6]{\frac{1024.25 - 1023.75}{32}} \right) = 32 \times \left(1 - \sqrt[6]{\frac{0.5}{32}} \right)$$

$$= 32 \times \left(1 - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \right) = 32 \times \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 32 \times \frac{1}{2} = 16$$

答え　等円の直径は　　　１６寸

２０１８年１月５日