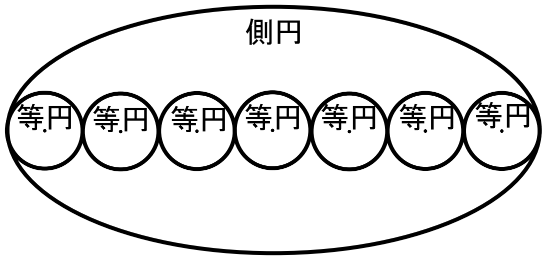
群馬の算額　２９－３　山名八幡宮　　文化１１年

今有如図側円内随長径
画等円数個乃仮画七円
両端円周者側円周切一処
他円各相接隣円
長径一十五寸短径五寸
欲使等円数至少
問円数総計



〔問題の意味〕

図のように、楕円のなかに長径に沿って等円を数個えがく、（図では仮に７円を画いてある、）両端の円は楕円の頂点で楕円に接していて、他の円は隣の円と互いに接している。

楕円の長径が１５寸、短径が５寸のとき、等円の個数の最小値は、いくつか。

〔解法例〕

はじめに、楕円の頂点で楕円に接する円の直径の最大値を考える。

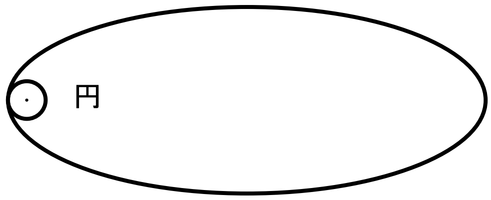


図２

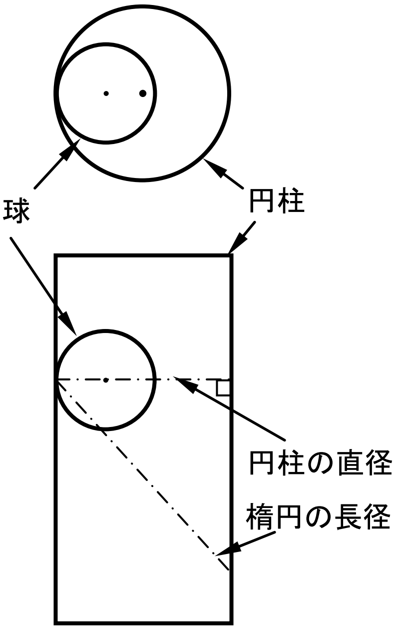


図３
上：上から見た図
下：横から見た図

図２のような、楕円と楕円の頂点で楕円に接する円は、
図３のような、円柱と円柱に接する球でできた立体を、
接点を通る面で切った断面と考えることができる。

図３の状態で、球の大きさをしだいに大きくして、
球の直径が円柱の直径と等しくなるときが、
この状態を保てる限界になる。
この限界の円柱と球を図４に示す。
図４の場合の断面を、図５に示す。

球の直径が円柱の直径よりも大きくなると、断面は図６のようになる。

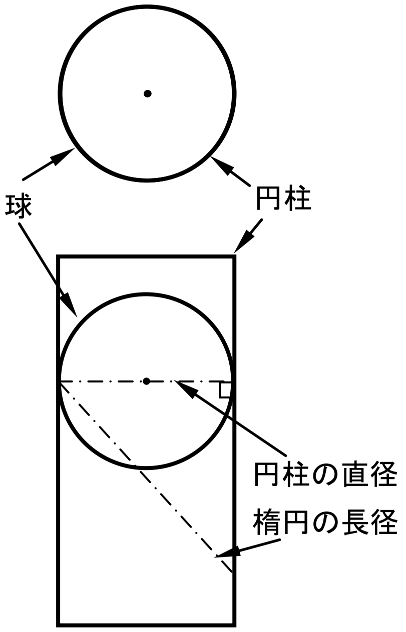


図４
上：上から見た図
下：横から見た図

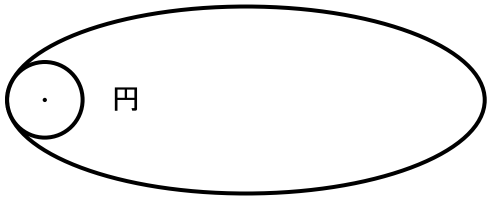


図５

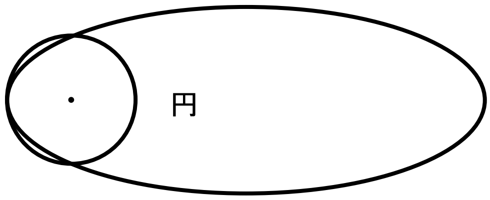


図６

図６では、楕円の頂点で円が接しているとは、言えなくなっている。

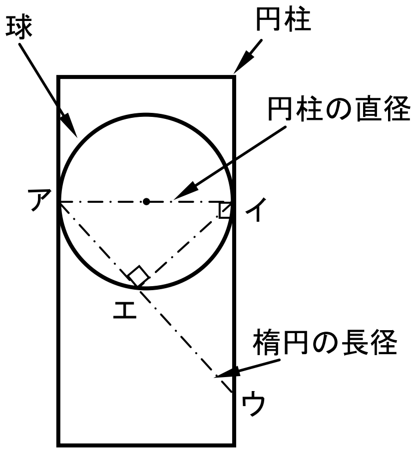


図７
横から見た図

図７のように、ア，イ，ウ，エとする。
楕円の長径を甲，楕円の短径を乙とする。
線分アイは、直径なので、角アエイは直角。
角イアエが共通なので、直角三角形アイウと
直角三角形アエイは相似。

$(\text{アイ}):(\text{アウ})=(\text{アエ}):(\text{アイ})$

$(\text{アウ})\times(\text{アエ})=(\text{アイ})\times(\text{アイ})$

ここで、$(\text{アウ})=(\text{楕円の長径})=\text{甲}$,

$(\text{アイ})=(\text{円柱の直径})=(\text{楕円の短径})=\text{乙}$　なので

$$(\text{アエ})=\frac{(\text{アイ})^2}{(\text{アウ})}=\frac{\text{乙}^2}{\text{甲}} \qquad \cdot\cdot\cdot(1)$$

楕円の頂点で楕円に接する円の直径の最大値は、（１）のようになる。

$$(\text{等円の個数の最小値})=\frac{(\text{楕円の長径})}{(\text{楕円の頂点で楕円に接する円の直径の最大値})}=\frac{\text{甲}}{\frac{\text{乙}^2}{\text{甲}}}=\frac{\text{甲}^2}{\text{乙}^2}=\left(\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\right)^2$$

甲＝１５、乙＝５　を入れると

$$(\text{等円の個数の最小値})=\left(\frac{15}{5}\right)^2=3^2=9$$

答え　　等円の個数の最小値は、９個

２０１７年１２月２９日