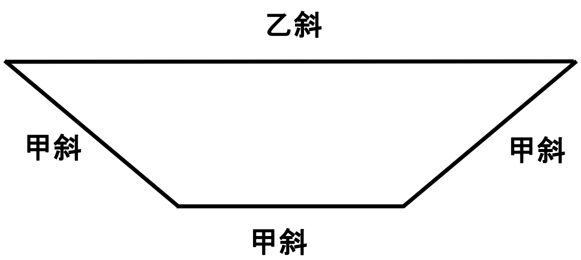
群馬の算額　３６－３　稲荷神社　　文政３年



今有如図四斜
甲斜各一寸
欲積最多
問乙斜幾何

〔問題の意味〕

図のような、等脚台形がある。３つの甲斜が１寸のとき、
等脚台形の面積を最大にする乙斜の長さは何寸か

〔解法例〕

乙斜の長さが、甲斜の長さと同じ状態を図２に示す。
図２は、正方形になっている。
乙斜が甲斜よりも短くなる場合は、面積が減少する一方である。

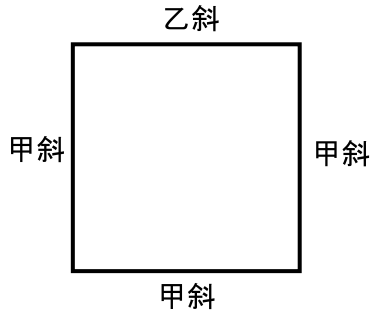


図２

乙斜が長くなる場合を図３のように書く。
乙斜が甲斜から左右に伸びた部分を　子とする。
このときの、等脚台形の高さを　丑とする。
甲斜の長さを　甲とする。

図３には、図２の正方形を破線で書いている。
中央の長方形の部分と、左右の三角形の部分で分けて考える。
長方形の部分の面積は、子が大きくなるにつれて丑が小さくなり、次第に小さくなる一方である。
左右の三角形の部分の面積は、図２では零であるが、そこから増加し、子と丑の長さが等しくなったところが最大で、以降は減少する。

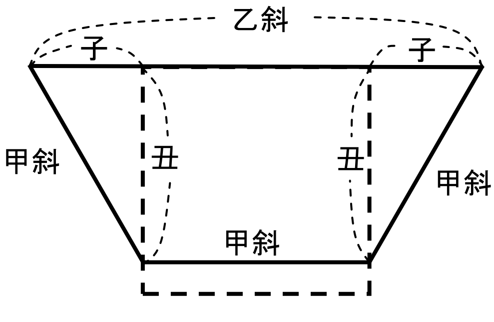


図３

図３の等脚台形の面積は

$$(\text{等脚台形の面積}) = \text{甲} \times \text{丑} + 2 \times \frac{1}{2} \times \text{子} \times \text{丑} = (\text{甲} + \text{子}) \times \text{丑} \qquad \cdots (1)$$

左右の三角形で、三平方の定理から

$丑^2 = 甲^2 - 子^2$

丑は正数なので

$$丑 = \sqrt{甲^2 - 子^2} \qquad \cdots (2)$$

（1）に（2）を代入して

$$(等脚台形の面積) = (甲 + 子) \times \sqrt{甲^2 - 子^2} \qquad \cdots (3)$$

$(甲 + 子)^2 \times \left(甲^2 - 子^2\right)$　が最大ならば　$\sqrt{(甲 + 子)^2 \times \left(甲^2 - 子^2\right)}$　が最大なので

$(甲 + 子)^2 \times \left(甲^2 - 子^2\right)$　の最大を考える

$$\begin{aligned}
(甲 + 子)^2 \times \left(甲^2 - 子^2\right) &= \left(甲^2 + 2 \times 甲 \times 子 + 子^2\right) \times \left(甲^2 - 子^2\right) \\
&= 甲^4 + 2 \times 甲^3 \times 子 + 甲^2 \times 子^2 - 甲^2 \times 子^2 - 2 \times 甲 \times 子^3 - 子^4 \\
&= 甲^4 + 2 \times 甲^3 \times 子 - 2 \times 甲 \times 子^3 - 子^4 \qquad \cdots (4)
\end{aligned}$$

（4）の適尽方級法を０として、　（微分して０とするのと同じ操作）

$$2 \times 甲^3 - 2 \times 3 \times 甲 \times 子^2 - 4 \times 子^3 = 0$$

$$子^3 + \frac{3}{2} \times 甲 \times 子^2 - \frac{1}{2} \times 甲^3 = 0 \qquad \cdots (5)$$

$$\left(子 - \frac{甲}{2}\right) \times \left(子^2 + 2 \times 甲 \times 子 + 甲^2\right) = 0$$

$$\left(子 - \frac{甲}{2}\right) \times (子 + 甲)^2 = 0$$

子，甲は、正数であるため　問題に合うのは

$$子 - \frac{甲}{2} = 0$$

$$子 = \frac{甲}{2} \qquad \cdots (6)$$

図３から

$$(乙斜の長さ) = 甲 + 2 \times 子$$

（６）を代入して

$$(乙斜の長さ) = 甲 + 2 \times \frac{甲}{2} = 2 \times 甲$$

甲＝１　を入れて

$\left(\text{乙斜の長さ}\right) = 2 \times 1 = 2$

（３）に（６）を代入して

$$\left(\text{等脚台形の面積}\right) = \left(\text{甲} + \frac{\text{甲}}{2}\right) \times \sqrt{\text{甲}^2 - \left(\frac{\text{甲}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \times \text{甲} \times \sqrt{\frac{3}{2^2} \times \text{甲}^2} = \frac{3}{2} \times \text{甲} \times \frac{\text{甲}}{2} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{3}}{4} \times \text{甲}^2$$

甲＝１　を入れて

$$\left(\text{等脚台形の面積}\right) = \frac{3 \times \sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{3 \times \sqrt{3}}{4}$$

答え　　等脚台形の面積を最大にする乙斜の長さは　　２寸