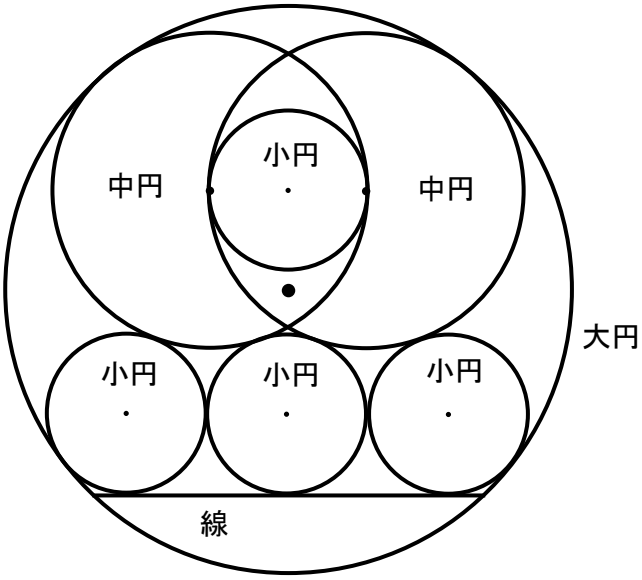
群馬の算額　７２－１５　貫前神社　　嘉永２年



今有如図大円内設線
相交中円而其罅容四小円
只云小円径七寸
問大円径幾何

〔問題の意味〕

図のように、大円のなかに１本の線（弦）と互いに交差する中円２個がある。そのすきまに４つの小円が接している。
小円の直径の長さが７寸のとき、大円の直径はいくらか。

〔解法例〕

図２のように作図する。
大円の中心を　アとする。
右の中円の中心を　イとする。
中央上の小円の中心を　ウ,
中央下の小円の中心を　エ,
右下の小円の中心を　オとする。
イから、線分エオへ下した垂線の足を
カとする。

大円の直径の長さを　大,
中円の直径の長さを　中,
小円の直径の長さを　小とする。

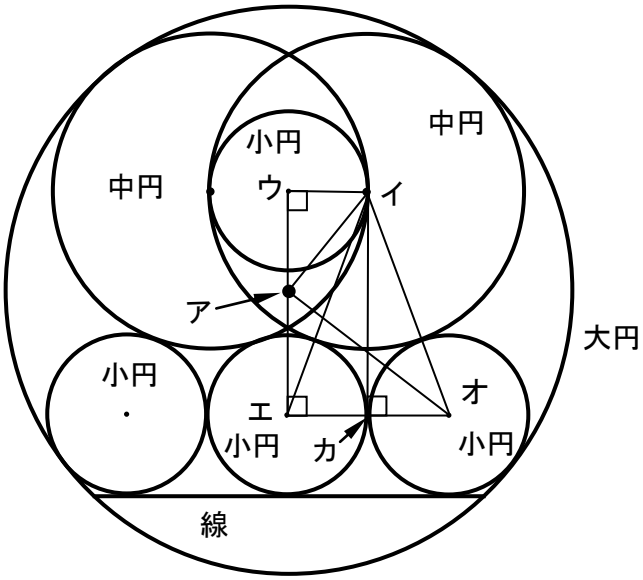


図２

中央下の小円と右下の小円は、共に右の中円に外接するので、三角形イエオは二等辺三角形となり、点カは、中央下の小円と右下の小円の接点に重なる。また、中円の中心イは、中央上の小円の円周上にあることが分かる。

$$中 = 2 \times 小 \qquad \cdots（1）$$

直角三角形アウイで、三平方の定理から

$$(アウ)^2 = (アイ)^2 - (ウイ)^2$$

ここで、$(アイ) = \dfrac{大}{2} - \dfrac{中}{2}$ ，$(ウイ) = \dfrac{小}{2}$ なので

$$(アウ)^2 = \left(\frac{大}{2} - \frac{中}{2}\right)^2 - \left(\frac{小}{2}\right)^2$$

両辺の平方根をとって、（アウ）は正数なので

$$(アウ) = \sqrt{\left(\frac{大}{2} - \frac{中}{2}\right)^2 - \left(\frac{小}{2}\right)^2} \qquad \cdots（2）$$

直角三角形アエオで、三平方の定理から

$$(アエ)^2 = (アオ)^2 - (エオ)^2$$

ここで、$(アオ) = \dfrac{大}{2} - \dfrac{小}{2}$ ，$(エオ) = 小$ なので

$$(アエ)^2 = \left(\frac{大}{2} - \frac{小}{2}\right)^2 - 小^2$$

両辺の平方根をとって、（アエ）は正数なので

$$(アエ) = \sqrt{\left(\frac{大}{2} - \frac{小}{2}\right)^2 - 小^2} \qquad \cdots（3）$$

直角三角形イカオで、三平方の定理から

$$(イカ)^2 = (イオ)^2 - (カオ)^2$$

ここで、$(イオ) = \dfrac{中}{2} + \dfrac{小}{2}$ ，$(カオ) = \dfrac{小}{2}$ なので

$$(イカ)^2 = \left(\frac{中}{2} + \frac{小}{2}\right)^2 - \left(\frac{小}{2}\right)^2$$

両辺の平方根をとって、（イカ）は正数なので

$$(イカ) = \sqrt{\left(\frac{中}{2} + \frac{小}{2}\right)^2 - \left(\frac{小}{2}\right)^2} \qquad \cdots（4）$$

図２から、

$$(\text{ウエ}) = (\text{ウア}) + (\text{アエ}) \qquad \cdots（５）$$

（５）に（２），（３），（４）を代入して

$$\sqrt{\left(\frac{\text{中}}{2}+\frac{\text{小}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{小}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{中}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{小}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{小}}{2}\right)^2-\text{小}^2}$$

$$\sqrt{(\text{中}+\text{小})^2-\text{小}^2}=\sqrt{(\text{大}-\text{中})^2-\text{小}^2}+\sqrt{(\text{大}-\text{小})^2-4\times\text{小}^2} \qquad \cdots（６）$$

（６）に（１）を代入して

$$\sqrt{(2\times\text{小}+\text{小})^2-\text{小}^2}=\sqrt{(\text{大}-2\times\text{小})^2-\text{小}^2}+\sqrt{(\text{大}-\text{小})^2-4\times\text{小}^2}$$

$$\sqrt{9\times\text{小}^2-\text{小}^2}=\sqrt{(\text{大}-2\times\text{小}+\text{小})\times(\text{大}-2\times\text{小}-\text{小})}+\sqrt{(\text{大}-\text{小}+2\times\text{小})\times(\text{大}-\text{小}-2\times\text{小})}$$

$$\sqrt{8\times\text{小}^2}=\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}+\sqrt{(\text{大}+\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}$$

$$\sqrt{8\times\text{小}^2}-\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}=\sqrt{(\text{大}+\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}$$

両辺を２乗して

$$8\times\text{小}^2+(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})-2\times\sqrt{8\times\text{小}^2}\times\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}$$
$$=(\text{大}+\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})$$

$$8\times\text{小}^2+\text{大}^2-4\times\text{小}\times\text{大}+3\times\text{小}^2-2\times\sqrt{8\times\text{小}^2}\times\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}$$
$$=\text{大}^2-2\times\text{小}\times\text{大}-3\times\text{小}^2$$

$$14\times\text{小}^2-2\times\text{小}\times\text{大}-4\times\sqrt{2}\times\text{小}\times\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}=0$$

小は、０でないので、両辺を　－２×小　で割って

$$-7\times\text{小}+\text{大}+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}=0$$

$$2\times\sqrt{2}\times\sqrt{(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})}=-\text{大}+7\times\text{小}$$

両辺を２乗して

$$8\times(\text{大}-\text{小})\times(\text{大}-3\times\text{小})=(-\text{大}+7\times\text{小})^2$$

$$8\times\text{大}^2-32\times\text{小}\times\text{大}+24\times\text{小}^2=\text{大}^2-14\times\text{小}\times\text{大}+49\times\text{小}^2$$

$$7\times\text{大}^2-18\times\text{小}\times\text{大}=25\times\text{小}^2$$

$$大^{2} - \frac{18 \times 小}{7} \times 大 = \frac{25 \times 小^{2}}{7}$$

$$\left(大 - \frac{9 \times 小}{7}\right)^{2} = \left(\frac{9 \times 小}{7}\right)^{2} + \frac{25 \times 小^{2}}{7}$$

$$\left(大 - \frac{9 \times 小}{7}\right)^{2} = \frac{81 \times 小^{2} + 175 \times 小^{2}}{49} = \frac{256}{7^{2}} \times 小^{2}$$

両辺の平方根をとって

$$大 - \frac{9 \times 小}{7} = \pm \frac{16}{7} \times 小$$

大　も　小　も、正数なので、復号のマイナス側は、問題に合わない。

$$大 = \frac{9 \times 小}{7} + \frac{16}{7} \times 小 = \frac{25}{7} \times 小 \qquad ・・・（7）$$

（7）に、小＝7　を入れて

$$大 = \frac{25}{7} \times 7 = 25$$

答え　　大円の直径は、　　２５寸