「群馬の算額　７２－６」で、「円は楕円の長径の端で、楕円に接する最大・・・」という条件がある。『楕円の長径の端での、楕円に接する円』について考えてみた。

図１は、楕円の長径の端で、楕円に接する円で、
直径が小さい場合。

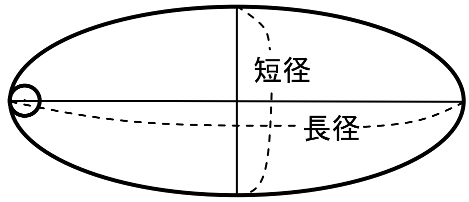

図１

円の直径を、大きくしていくと、図２のように
なってしまう。
図２は、円は楕円に２点で接していて、『楕円の
長径の端で楕円に接する』という条件が成り立たなく
なっていることが解る。

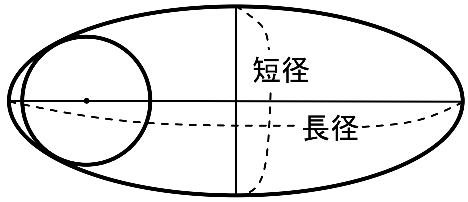

図２

さらに、円の直径を大きくすると、
図３のように、短径の両端で楕円に接する円に
なり、これ以上には大きくできない。

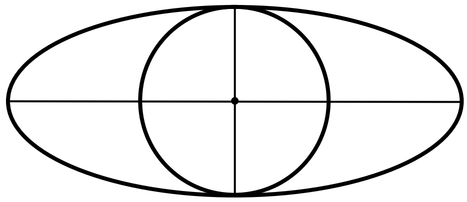

図３

図１から、円の直径を小さくするのは、限界はない。

図１の円の直径を大きくしていくとき、『楕円の
長径の端を通る』という条件に変えた場合は、
図４のようになる。

図１→図４と変化する場合で、
『楕円の長径の端で、楕円に接する』円の最大直径を
考えてみる。

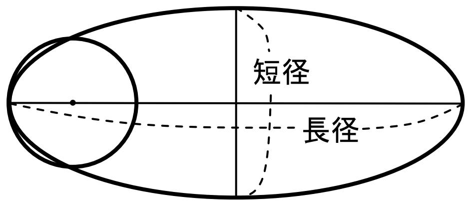

図４

楕円は、短径と同じ長さの直径の円柱を、斜めに切った
断面の形で、表せる。

図５～図７のように、円柱と球とが接して場合、
その接点を通る斜めの面で切った場合の、断面を考える。

図５の場合、断面は、図１のようになる。

図７の場合、断面は、図４のようになる。

『楕円の長径の端で、楕円に接する』円の最大直径は、図６の場合の断面として得られる。
上から見た図で、円柱と球が重なる場合である。

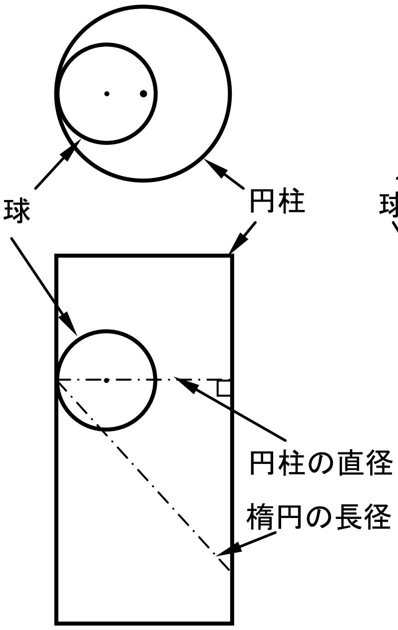

図５
上：上から見た図
下：横から見た図

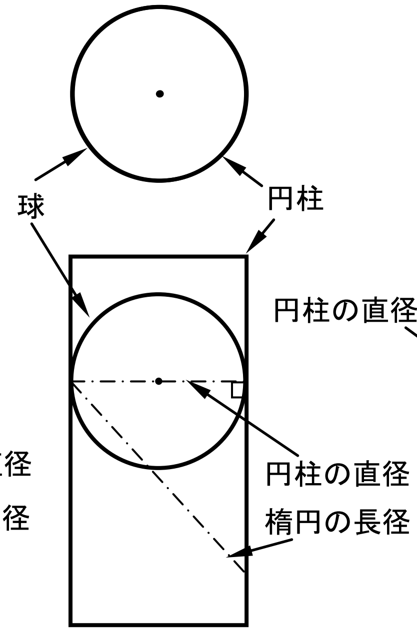

図６
上：上から見た図
下：横から見た図

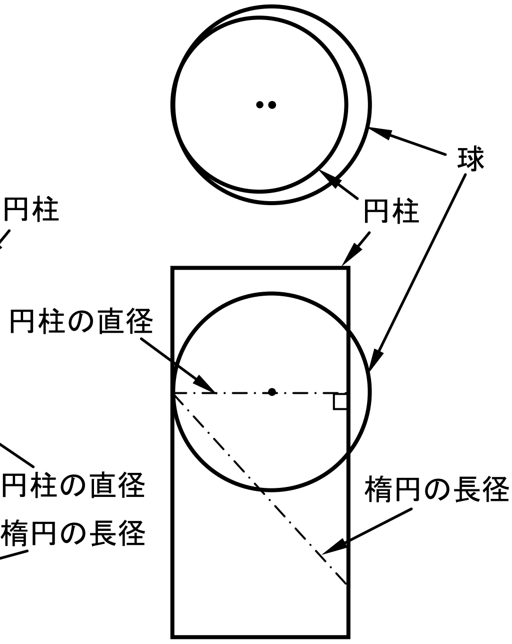

図７
上：上から見た図
下：横から見た図

図６の横から見た図を書き直し、点の記号を付けて、
図８とする。
アから、楕円の長径イウへ下した垂線の足を　エとする。
エは、球の表面にあり、線分イエは、断面に見える円の
直径となっている。

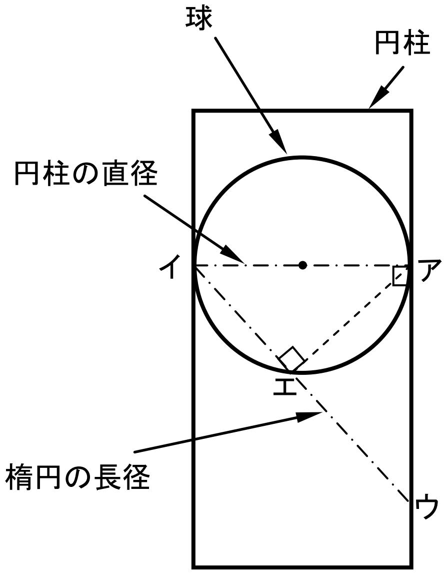

図８
横から見た図

直角三角形イエアと、直角三角形イアウは、相似。
(イエ)：(イア)＝(イア)：(イウ)
(イエ)×(イウ)＝(イア)×(イア)
ここで、(イエ)は、最大の内接円の直径　，
(イウ)は、楕円の長径　，(イア)は、円柱の直径　でも
球の直径　でもあり　　楕円の短径でもある。

$$(\text{最大の内接円の直径})\times(\text{楕円の長径})=(\text{楕円の短径})^2$$

$$(\text{『楕円の長径の端で、楕円に接する』円の最大直径})=\frac{(\text{楕円の短径})^2}{(\text{楕円の長径})}$$

この関係が使えることが解った。