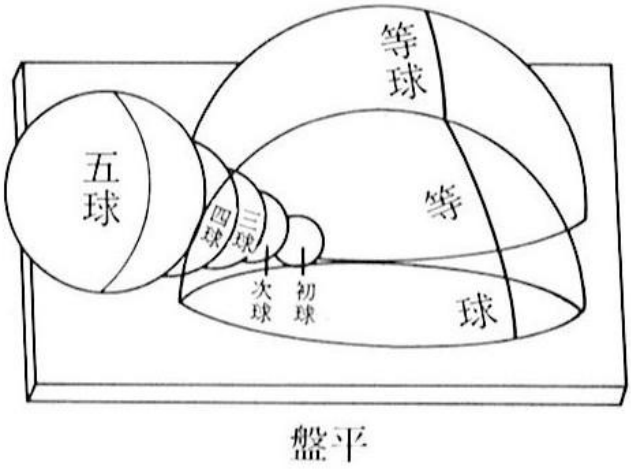
群馬の算額　６７－１　玉村八幡宮　　天保１５年



今有如図盤上載半等球二個
相親其罅隙挾逐球仮画五球
等球径二百八十八寸
初球径一寸
問逐球個数及末球径幾何

〔問題の意味〕

図のように、盤上に直径の等しい半球２個を接して載せてあり、
そのすきまに逐球を挟む。（図は『群馬の算額』のものを流用している）
図は、仮に５球まで書いてある。等しい半球の直径が２８８寸で、すきまの初球の直径が１寸のとき、逐球の個数と末球の直径は、いくらか？
（末球とは、逐球の最終の球を指す。）

〔解法例〕

図２～図４のように作図する。
図２は上から見た図，図３は前から見た図，
図４は右よこから見た図です。

等しい半球は、その$\frac{1}{4}$の部分しか問題に
関係しないので、関係ある部分のみの図とした。

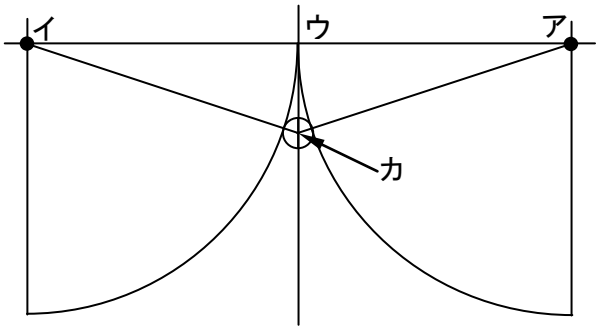


図２　上から見た図

２つの等しい半球の中心を　ア，イ　とする。
２つの等しい半球の接点を　ウとする。
初球の中心を　カ　とする。
初球と平盤の接点を　ナ　とする。

等しい半球の直径を　等，
初球の直径を　甲　とする。

図２で、三角形アウカは直角三角形なので、
三平方の定理から

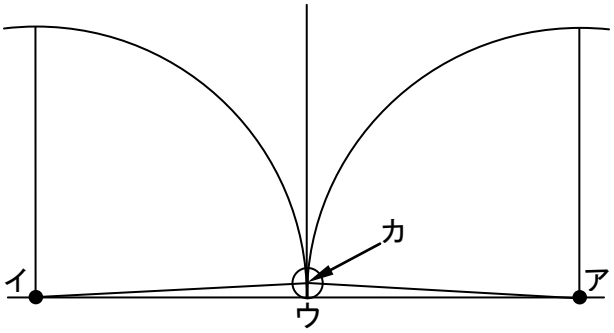


図３　前から見た図

$$(ウカ)^2 = (アカ)^2 - (アウ)^2$$

ここで　$(アカ) = \frac{等}{2} + \frac{甲}{2}$　，$(アウ) = \frac{等}{2}$なので

$$(ウカ)^2 = \left(\frac{等}{2} + \frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$(ウカ)^2 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{等}{2} \times \frac{甲}{2} + \left(\frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$(ウカ)^2 = 等 \times \frac{甲}{2} + \left(\frac{甲}{2}\right)^2 \qquad ・・・(1)$$

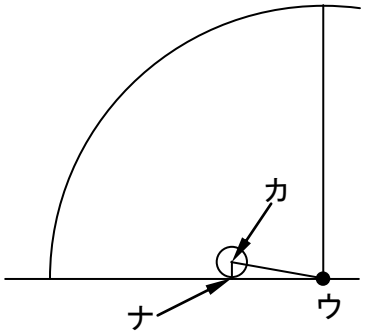


図４　右よこから見た図

図４で、三角形ウナカは直角三角形なので、三平方の定理から

$$(ウナ)^2 = (ウカ)^2 - (カナ)^2$$

ここで　(１)から$(ウカ)^2 = 等 \times \frac{甲}{2} + \left(\frac{甲}{2}\right)^2$　，$(カナ) = \frac{甲}{2}$　なので

$$(ウナ)^2 = 等 \times \frac{甲}{2} + \left(\frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{甲}{2}\right)^2 = 等 \times \frac{甲}{2} \qquad ・・・(2)$$

つぎに、次球を追加した図，図５～図７を作図する。

次球の中心を　キ　とする。
次球と平盤の接点を　二　とする

図７で、カから線分キ二に下した垂線の
足を　ラ　とする。

次球の直径を　乙　とする。

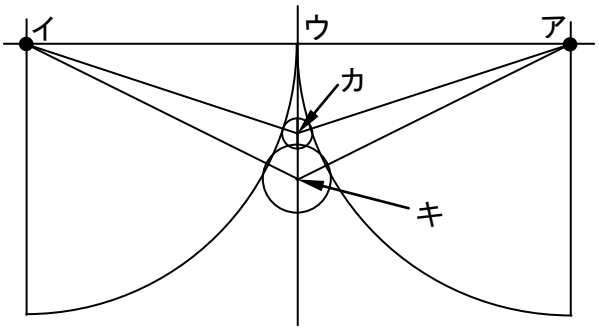


図５　上から見た図

図５で、三角形アウキは直角三角形なので、
三平方の定理から

$$(ウキ)^2 = (アキ)^2 - (アウ)^2$$

ここで　$(アカ) = \frac{等}{2} + \frac{乙}{2}$　，$(アウ) = \frac{等}{2}$なので

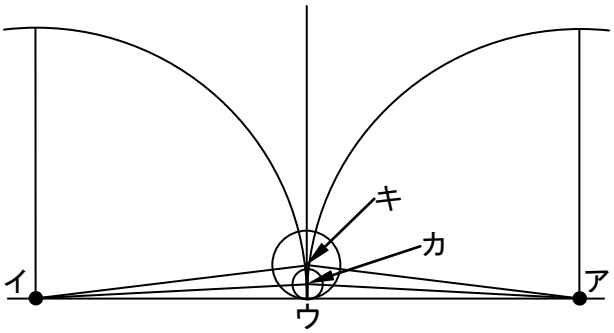


図６　前から見た図

$$(ウキ)^2 = \left(\frac{等}{2}+\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$(ウキ)^2 = \left(\frac{等}{2}\right)^2 + 2\times\frac{等}{2}\times\frac{乙}{2}+\left(\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{等}{2}\right)^2$$

$$(ウキ)^2 = 等\times\frac{乙}{2}+\left(\frac{乙}{2}\right)^2 \qquad ・・・(3)$$

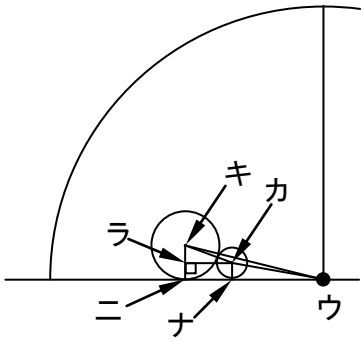


図７　右よこから見た図

図７で、三角形ウニキは直角三角形なので、三平方の定理から

$$(ウニ)^2 = (ウキ)^2 - (キニ)^2$$

ここで　(３)から$(ウキ)^2 = 等\times\frac{乙}{2}+\left(\frac{乙}{2}\right)^2$　，$(キニ)=\frac{乙}{2}$　なので

$$(ウニ)^2 = 等\times\frac{乙}{2}+\left(\frac{乙}{2}\right)^2 - \left(\frac{乙}{2}\right)^2 = 等\times\frac{乙}{2} \qquad ・・・(4)$$

図７で、直角三角形カラキで、三平方の定理から

$$(カラ)^2 = (カキ)^2 - (キラ)^2$$

ここで　$(カキ)=\frac{乙}{2}+\frac{甲}{2}$　，$(キラ)=\frac{乙}{2}-\frac{甲}{2}$　なので

$$(カラ)^2 = \left(\frac{乙}{2}+\frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{乙}{2}-\frac{甲}{2}\right)^2 = \left(\frac{乙}{2}\right)^2 + 2\times\frac{乙}{2}\times\frac{甲}{2}+\left(\frac{甲}{2}\right)^2 - \left(\frac{乙}{2}\right)^2 + 2\times\frac{乙}{2}\times\frac{甲}{2}-\left(\frac{甲}{2}\right)^2$$

$$(カラ)^2 = 乙\times甲 \qquad ・・・(5)$$

（ウナ），（ウニ），（カラ）は距離で正数なので、（２），（４），（５）から

$$(ウナ) = \sqrt{等\times\frac{甲}{2}} \qquad ・・・(6)$$

$$(ウニ) = \sqrt{等\times\frac{乙}{2}} \qquad ・・・(7)$$

$$(カラ) = \sqrt{乙\times甲} \qquad ・・・(8)$$

図７から、$(ウニ)=(ウナ)+(ナニ)$　，　$(ナニ)=(カラ)$　なので　，
$(ウニ)=(ウナ)+(カラ)$

$$\sqrt{\text{等}\times\frac{\text{乙}}{2}}=\sqrt{\text{等}\times\frac{\text{甲}}{2}}+\sqrt{\text{乙}\times\text{甲}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{\text{等}\times\text{甲}\times\text{乙}}{\text{甲}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{\text{等}\times\text{甲}\times\text{乙}}{\text{乙}}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{2\times\text{等}\times\text{甲}\times\text{乙}}{\text{等}}}$$

両辺を、$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\text{等}\times\text{甲}\times\text{乙}}$　で割ると（$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\text{等}\times\text{甲}\times\text{乙}}$　は　０　でないので）

$$\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{乙}}}+\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\text{乙}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}} \qquad \cdots(9)$$

三番目の逐球を三球とし、三球の直径を　丙　とすると、初球と次球の関係が、次球と三球にも成り立つため、

$$\sqrt{\frac{1}{\text{丙}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{乙}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}} \qquad \cdots(10)$$

さらに、四番目の逐球を四球とし、四球の直径を　丁　とすると、やはり初球と次球の関係が、三球と四球の間にも成り立つ

$$\sqrt{\frac{1}{\text{丁}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{丙}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}} \qquad \cdots(11)$$

以下も、同様に考えられる。
ここで、（１１）に（１０），（９）を次々に代入して

$$\sqrt{\frac{1}{\text{丁}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{丙}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{乙}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}-\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}=\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}-3\times\sqrt{\frac{2}{\text{等}}} \qquad \cdot(12)$$

これで、たとえば８番目の逐円の直径や、１１番目の逐円の直径は、次のようであることが解る。

$$\sqrt{\frac{1}{(\text{８番目の逐円の直径})}}=\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}-(8-1)\times\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{(\text{１１番目の逐円の直径})}}=\sqrt{\frac{1}{\text{甲}}}-(11-1)\times\sqrt{\frac{2}{\text{等}}}$$

したがって、末球の直径を　子　，末球の逐円番号を　丑　とすると

$$\sqrt{\frac{1}{子}}=\sqrt{\frac{1}{甲}}-(丑-1)\times\sqrt{\frac{2}{等}} \qquad \cdots(13)$$

（１３）の左辺は、正数であるので、右辺も正数である必要がある。

$$0<\sqrt{\frac{1}{甲}}-(丑-1)\times\sqrt{\frac{2}{等}}$$

$$(丑-1)\times\sqrt{\frac{2}{等}}<\sqrt{\frac{1}{甲}}$$

$\sqrt{\frac{2}{等}}$ は、正数であるため、両辺を $\sqrt{\frac{2}{等}}$ で割って

$$(丑-1)<\sqrt{\frac{1}{甲}}\times\sqrt{\frac{等}{2}}=\frac{\sqrt{等}}{\sqrt{2}\times\sqrt{甲}}$$

$$丑<\frac{\sqrt{等}}{\sqrt{2}\times\sqrt{甲}}+1 \qquad \cdots(14)$$

等＝２８８，甲＝１　を入れると

$$丑<\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}\times\sqrt{1}}+1=\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{144}+1=12+1=13$$

丑は、末球が逐球の何番目かという個数なので、正の整数である。
したがって、丑は１２である。
（１３）から

$$\sqrt{\frac{1}{子}}=\frac{\sqrt{等}-(丑-1)\times\sqrt{2\times甲}}{\sqrt{甲\times等}}$$

両辺を２乗して、

$$\frac{1}{子}=\frac{\left\{\sqrt{等}-(丑-1)\times\sqrt{2\times甲}\right\}^2}{甲\times等}$$

分子，分母を入れ替えて

$$子 = \frac{甲 \times 等}{\left\{\sqrt{等} - (丑 - 1) \times \sqrt{2 \times 甲}\right\}^2}$$

等＝２８８，甲＝１，丑＝１２　を入れると

$$子 = \frac{1 \times 288}{\left\{\sqrt{288} - (12 - 1) \times \sqrt{2 \times 1}\right\}^2} = \frac{288}{\left\{12 \times \sqrt{2} - 11 \times \sqrt{2}\right\}^2} = \frac{288}{\left\{\sqrt{2}\right\}^2} = \frac{288}{2}$$

子＝１４４

答え　　逐球の個数は、１２個
　　末球の直径は、１４４寸

〔確認〕

各逐球の直径は、次のようになる。

初球	直径	１寸	，	次球	直径	$\frac{144}{121}$寸	，	三球	直径	$\frac{144}{100}$寸	，
四球	直径	$\frac{144}{81}$寸	，	五球	直径	$\frac{144}{64}$寸	，	六球	直径	$\frac{144}{49}$寸	，
七球	直径	４寸	，	八球	直径	$\frac{144}{25}$寸	，	九球	直径	９寸	，
十球	直径	１６寸	，	十一球	直径	３６寸	，	十二球	直径	１４４寸	，

等しい半球と，十球，十一球，十二球を大きさの関係に注意して図にすると、図８，図９となる。

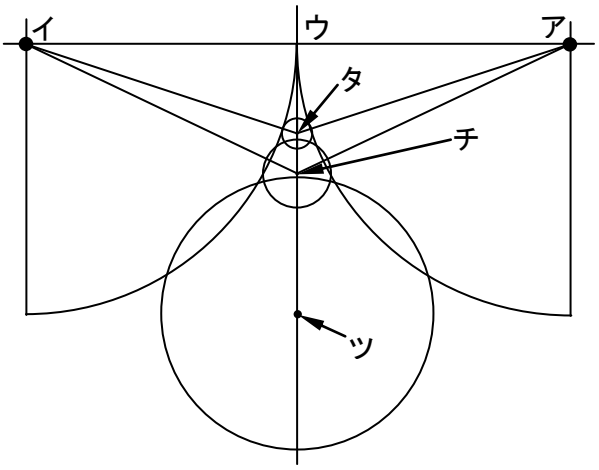


図８　上から見た図

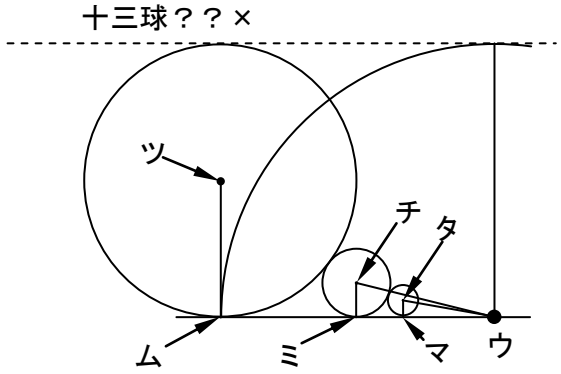


図９　右よこから見た図

２つの等しい半球と十二球に接する球は、図９に破線で示す直径無限大の球が考えられるが、平盤に接することができず、無いと思われる。したがって、この問題の逐球は、十二球までである。
十二球が末球である確認ができた。