群馬の算額　１１１

倉賀野神社　　慶応３年（１８６７年）　　鈴木角右衛門勝森

第２問／全２問中　　現代的解法１

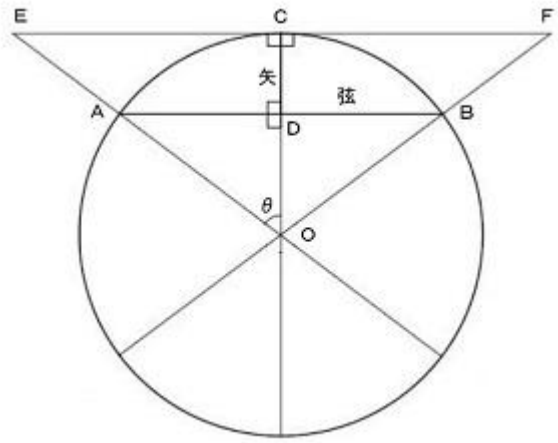


図１

左の図１において、矢（し）はＣＤ，弦はＡＢで表され、求める弧背は、弧ＡＣＢの長さ。

円径（円の直径）を、２ｒ，矢（し）を、ｔ，弦を、２ｐ，弧背を、ｓ　また∠ＡＯＣをθ（ラジアン）と置く。

円周＝直径×円周率　　であり
３６０度は、２π（ラジアン）なので
求める弧背は、

$$s = 2r \times \pi \times \frac{2\theta}{2\pi}$$

約分して、　　$s = 2r\theta$　　となる。

ここで、直角三角形ＡＯＤで、鉤股弦の術（三平方の定理、ピタゴラスの定理）から

$$r^2 = p^2 + (r - t)^2$$

$$2rt = p^2 + t^2$$

$$r = \frac{p^2 + t^2}{2t}$$

となる。　　この式は次のように変形できる。

$$r = \frac{p^2 + t^2}{2t} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{p^2}{t} + t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{t}{p^2}} + t \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\frac{t^2}{p^2}} + t \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{t}{\left(\frac{t}{p}\right)^2} + t \right\}$$

ここで、

$$極 = \frac{矢}{弦} \times 2 \quad から、極 = \frac{t}{2p} \times 2 = \frac{t}{p}$$

$$率 = 極^2 \quad から、率 = \left(\frac{t}{p}\right)^2 \quad これを適用すると、$$

$$r = \frac{1}{2}\left\{\frac{t}{\left(\frac{t}{p}\right)^2} + t\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{矢}{率} + 矢\right)$$

次に、θ を矢と弦で表すことを考える。

$$\tan\theta = \frac{AD}{OD} = \frac{AD}{OC - DC} = \frac{p}{r - t}$$

は、$\frac{p}{r-t} > 1$ のためテーラー展開できない。

左の図２で、二等辺三角形ＯＡＧを考えると、

∠ＡＧＤは、$\frac{\theta}{2}$ であることがわかる。

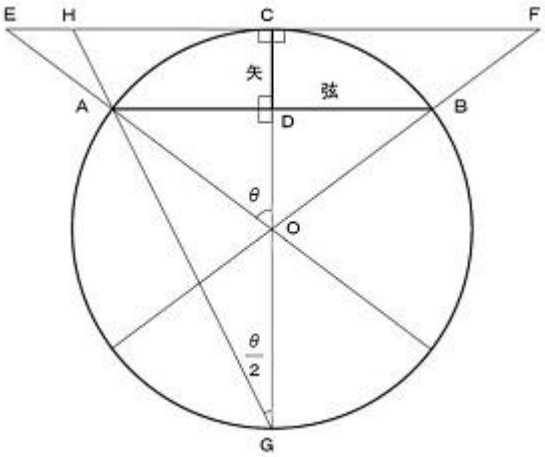


図２

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{AD}{GD} = \frac{AD}{GC - DC} = \frac{p}{2r - t}$$

ここで　$r = \frac{p^2 + t^2}{2t}$　を適用すると次のように変形できる。

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{p}{2r - t} = \frac{p}{2 \times \frac{p^2 + t^2}{2t} - t} = \frac{p}{\frac{p^2 + t^2 - t^2}{t}} = \frac{p}{\frac{p^2}{t}} = \frac{1}{\frac{p}{t}} = \frac{t}{p}$$

また、$極 = \frac{t}{p}$　であるから、

$\tan\frac{\theta}{2} = 極$　である。

したがって、アークタンジェント極　を求めることにより　$\frac{\theta}{2}$　が得られる。

一般にアークタンジェント極は、$\tan^{-1}極$　または　$\arctan極$　と書く。

ここでは、$\tan^{-1}$ 極　と書くことにする。

$\tan^{-1}$ 極　は、$-1 \leqq$ 極$= \dfrac{p}{2r-t} \leqq 1$　なので、テーラー展開することにより、次のような近似式で表すことができる。

$$\tan^{-1}\text{極} = (\text{極}) - \frac{1}{3}(\text{極})^3 + \frac{1}{5}(\text{極})^5 - \frac{1}{7}(\text{極})^7 + \frac{1}{9}(\text{極})^9$$

$$-\frac{1}{11}(\text{極})^{11} + \frac{1}{13}(\text{極})^{13} - \frac{1}{15}(\text{極})^{15} + \frac{1}{17}(\text{極})^{17} \cdots$$

高次までつづくのですが、以降は７次程度まで（第４項まで）で表現することにする。

このことから、弧背ｓは次のように表せる。

$s = 2r\theta$

$$= 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times 2 \times \tan^{-1}\text{極}$$

$$\fallingdotseq 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \left\{(\text{極}) - \frac{1}{3}(\text{極})^3 + \frac{1}{5}(\text{極})^5 - \frac{1}{7}(\text{極})^7 \cdots\right\}$$

$$= 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極} - \frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times (\text{極})^3$$

$$+\frac{1}{5} \times 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times (\text{極})^5 - \frac{1}{7} \times 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times (\text{極})^7 \cdots$$

$$= \left\{2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極}\right\} - \frac{1}{3} \times \left\{2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極}\right\} \times (\text{率})$$

$$+\frac{1}{5} \times 3 \times \left[\frac{1}{3} \times \left\{2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極}\right\} \times (\text{率})\right] \times (\text{率})$$

$$-\frac{1}{7} \times 5 \times \left[\!\left[\frac{1}{5} \times 3 \times \left[\frac{1}{3} \times \left\{2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極}\right\} \times (\text{率})\right] \times (\text{率})\right]\!\right] \times (\text{率}) \cdots$$

$= (\text{原数}) - (\text{一差}) + (\text{二差}) - (\text{三差}) + (\text{四差}) - (\text{五差}) \cdots$

＝（原数）＋$\{(\text{二差}) + (\text{四差}) \cdots\} - \{(\text{一差}) + (\text{三差}) + (\text{五差}) \cdots\}$

＝（原数）＋（偶数番目差の和）－（奇数番目差の和）

このとき、

$$\text{原数} = 2 \times \left(\frac{\text{矢}}{\text{率}} + \text{矢}\right) \times \text{極} \qquad \text{一差} = \frac{1}{3} \times \text{原数} \times \text{率}$$

$$\text{二差} = \frac{3}{5} \times \text{一差} \times \text{率} \qquad \text{三差} = \frac{5}{7} \times \text{二差} \times \text{率}$$

術文と同じになるので、術文は近似式として正しい。

矢が１寸、弦が４寸のときの弧背ｓは、

矢＝１　　弦＝４

$$極 = \frac{矢}{弦} \times 2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$率 = 極^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$原数 = 2 \times \left(\frac{矢}{率} + 矢\right) \times 極 = 2 \times \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} + 1\right) \times \frac{1}{2} = 2 \times (4 + 1) \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$一差 = \frac{1}{3} \times 原数 \times 率 = \frac{1}{3} \times 5 \times \frac{1}{4} \fallingdotseq 0.4166\ 6666\ 6666\ 6667$$

$$二差 = \frac{3}{5} \times 一差 \times 率 = \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{3} \times 5 \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = 0.0625$$

$$三差 = \frac{5}{7} \times 二差 \times 率 = \frac{5}{7} \times 0.0625 \times \frac{1}{4}$$

$$\fallingdotseq 0.0111\ 6071\ 4285\ 7143$$

$$四差 = \frac{7}{9} \times 三差 \times 率 = \frac{7}{9} \times \left(\frac{5}{7} \times 0.0625 \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}$$

$$\fallingdotseq 0.0021\ 7013\ 8888\ 8889$$

以下同様に計算する。

各項	数値	累積値
原数	＋5	5
一差	－0．4166　6666　6666　6667	4．5833　3333　3333　3333
二差	＋0．0625	4．6458　3333　3333　3333
三差	－0．0111　6071　4285　7143	4．6346　7261　9047　6190
四差	＋0．0021　7013　8888　8889	4．6368　4275　7936　5079
五差	－0．0004　4389　2045　4545	4．6363　9886　5891　0534
六差	＋0．0000　9390　0240　3846	4．6364　9276　6131　4380
七差	－0．0000　2034　5052　0833	4．6364　7242　1079　3547
八差	＋0．0000　0448　7879　1360	4．6364　7690　8958　4907

各項	数値	累積値
九差	－０．０００　０１００　３８６７　７０１４	４．６３６４　７５９０　５０９０　７８９３
十差	＋０．０００　００２２　７０６５　３１３４	４．６３６４　７６１３　２１５６　１０２７
十一差	－０．０００　０００５　１８３０　１２５９	４．６３６４　７６０８　０３２５　９７６８
十二差	＋０．０００　０００１　１９２０　９２９０	４．６３６４　７６０９　２２４６　９０５８
十三差	－０．０００　０００　２７５９　４７４３	４．６３６４　７６０８　９４８７　４３１５
十四差	＋０．０００　０００　０６４２　２９１４	４．６３６４　７６０９　０１２９　７２２９
十五差	－０．０００　０００　０１５０　２１３３	４．６３６４　７６０８　９９７９　５０９６
十六差	＋０．０００　０００　００３５　２７７４	４．６３６４　７６０９　００１４　７８７０
十七差	－０．０００　０００　０００８　３１５４	４．６３６４　７６０９　０００６　４７１６
十八差	＋０．０００　０００　０００１　９６６５	４．６３６４　７６０９　０００８　４３８１
十九差	－０．０００　０００　０００　４６６４	４．６３６４　７６０９　０００７　９７１７
二十差	＋０．０００　０００　０００　１１０９	４．６３６４　７６０９　０００８　０８２６
二十一差	－０．０００　０００　０００　０２６４	４．６３６４　７６０９　０００８　０５６２
二十二差	＋０．０００　０００　０００　００６３	４．６３６４　７６０９　０００８　０６２５
二十三差	－０．０００　０００　０００　００１５	４．６３６４　７６０９　０００８　０６１０
二十四差	＋０．０００　０００　０００　０００４	４．６３６４　７６０９　０００８　０６１４
二十五差	－０．０００　０００　０００　０００１	４．６３６４　７６０９　０００８　０６１３
二十六差	＋０．０００　０００　０００　００００	４．６３６４　７６０９　０００８　０６１３

以上の数値計算により、

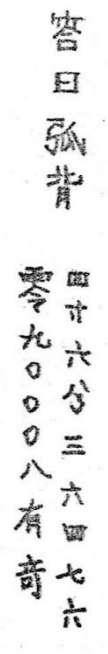
弧背は、４寸６分３６４７６０９０００８　有奇　　と表せる。

算額の「答曰」は、４寸６分３６４７６０９■■■８　有奇　　であり正しい。

《あとがき》

１．本解法例は、昭和４４年（１９６９年）１月２５日に上毛新聞に載せた説明で『タンゼントマイナス１ＸのＸによる展開公式』とあるのを参考にした。
群馬県和算研究会の会報第４４号に復刻されている。

２．ここでは算額の「答曰」は、「４寸６分３６４７６０９■■■８　有奇」としたが、『群馬の算額解法』では、「四寸六分三六四七六零九〇〇〇八有奇」、および、「４寸６分３６４７６０９０００８余」としている。
また、『群馬の算額』（１９８７年発行）も「四寸六分三六四七六零九〇〇〇八有奇」とある。



これらは、『群馬の算額　第３集』に右の図３のように載っているためと思われる。
小数第７桁目の「０」が「零」と漢字で表されているが、小数第８桁目～第１０桁目については、アラビア数字の「０」に見えるが、慶応３年にアラビア数字は不自然である。
算木を使う時の空算かもしれないがこれもあまり自然とは思えない。

私は、この小数第８桁目～第１０桁目が読み取れず、文字があるというマークを書いた可能性も有ると考えた。

または、「零々々」を見て、「０００」と写してしまった可能性もある。

いずれにしても、小数第１１桁目の「八」が合っているので、答えは合っている。

すでに、実際の算額は、文字が読めなくなっているため、事実は不明である。

術文の方法では、平方根を求める計算が無く、四則演算のみで行えるため簡単であるが、当時も二十差程度まで計算を行っていることが分かった。

３．「アークタンジェント」も「テーラー展開」も、私自信が良く分かっていない。

４５度は、$\frac{\pi}{4}$　ラジアン　であり、$\tan\frac{\pi}{4}=1$　である。
１のアークタンジェントのテーラー展開をすれば、π／４が求められ、これから円周率が求められる。
マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数とよばれるが、ヨーロッパでは１６７０年頃の発見だが、インドでは１４００年頃にすでに発見されていて円周率が１１桁程度まで求められていたと聞きます。

以上